

PRIMER BLOQUE

A Considera la función $f(x)$ definida para $x \neq 0$ por la relación: $f(x) = \frac{4x^2 + 3x + 4}{x}$

- Halla las ecuaciones de sus asíntotas.
- Determina los máximos y mínimos locales.
- Dibuja la gráfica de $f(x)$.

a)

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{4 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 4}{0} = \frac{4}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \Rightarrow \text{Asíntota vertical en } x = 0$$

Asíntotas horizontales

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x + 4}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x + 3}{1} = \infty$$

No existe asíntota horizontal cuando $x \rightarrow \infty$

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 3x + 4}{x} = \frac{-\infty}{-\infty} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x + 3}{1} = -\infty$$

No existe asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$

Asíntotas oblicuas

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x + 4}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x + 4}{x^2} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x + 3}{2x} = \frac{\infty}{\infty} = \\ &= \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8}{2} = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 + 3x + 4}{x} - 4x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x + 4 - 4x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 4}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \\ &= \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{1} = 3 \end{aligned}$$

Existe asíntota oblicua $y = 4x + 3$ cuando $x \rightarrow \infty$

Continuación del Problema A del Primer Bloque

a) Continuación

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 3x + 4}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 3x + 4}{x^2} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x + 3}{2x} = \frac{-\infty}{-\infty} =$$

$$= \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8}{2} = 4$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x^2 + 3x + 4}{x} - 4x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 3x + 4 - 4x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 4}{x} = \frac{-\infty}{-\infty} =$$

$$= \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{1} = 3$$

Existe asíntota oblicua $y = 4x + 3$ cuando $x \rightarrow -\infty$

b)

$$f'(x) = \frac{(8x + 3)x - (4x^2 + 3x + 4)}{x^2} = \frac{8x^2 + 3x - 4x^2 - 3x - 4}{x^2} = \frac{4x^2 - 4}{x^2} = 4 \frac{x^2 - 1}{x^2} \Rightarrow$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4 \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

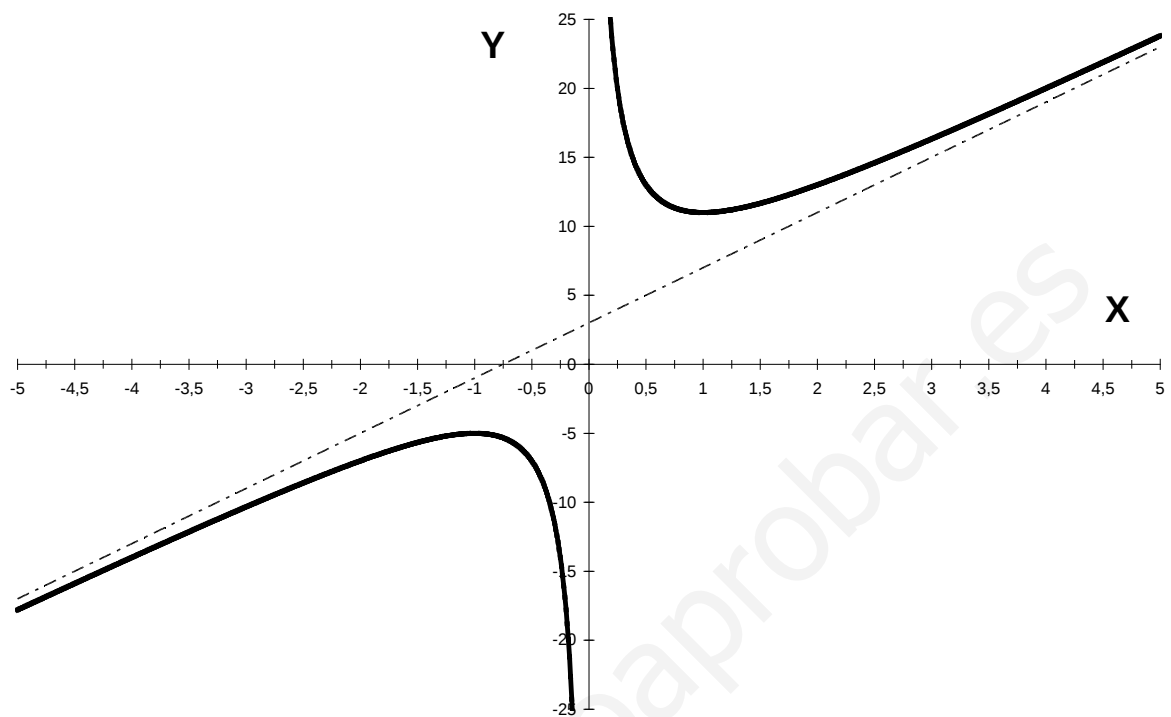
$$f''(x) = 4 \frac{2x \cdot x^2 - 2x(x^2 - 1)}{x^4} = 4 \frac{2x^2 - 2x^2 + 2}{x^3} = \frac{8}{x^3} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f''(-1) = \frac{8}{(-1)^3} = -8 < 0 \Rightarrow \text{Máximo} \\ f''(1) = \frac{8}{1^3} = 8 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \text{Máximo relativo} \Rightarrow x = -1 \Rightarrow f(-1) = \frac{4 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 4}{(-1)} = \frac{4 - 3 + 4}{(-1)} = -5 \\ \text{Mínimo relativo} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{4 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 4}{1} = \frac{4 + 3 + 4}{1} = 11 \end{cases}$$

Continuación del Problema A del Primer Bloque

c)



B Resuelve la ecuación:
$$\begin{vmatrix} 2x-1 & 3x & x-2 \\ 2x+1 & x & 2x+1 \\ 2x-1 & 3x & 3x-2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2x-1 & 3x & x-2 \\ 2 & -2x & x+3 \\ 0 & 0 & 2x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x \cdot \begin{vmatrix} 2x-1 & 3x \\ 2 & -2x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x^2 \cdot \begin{vmatrix} 2x-1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

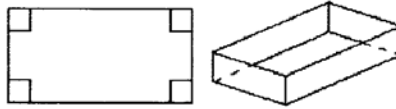
$$2x^2 \cdot (-4x + 2 - 6) = 0 \Rightarrow 2x^2 \cdot (-4x - 4) = 0 \Rightarrow -8x^2 \cdot (x + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 \cdot (x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

SEGUNDO BLOQUE

A Con una lámina rectangular de 30 cm de largo por 15 cm de ancho se quiere construir una caja sin tapa. Para ello se recortan unos cuadrados de los vértices y se doblan en ángulo recto las pestañas resultantes tal y

como muestra la figura.



- a) Calcula el lado del cuadrado recortado para que el volumen sea máximo.
b) Calcula el volumen máximo.

Siendo H el lado del cuadrado que además es la altura de la caja

$$V = (30 - 2H) \cdot (15 - 2H) \cdot H \Rightarrow$$

$$V' = \frac{dV}{dH} = (-2) \cdot (15 - 2H) \cdot H + (-2) \cdot (30 - 2H) \cdot H + (30 - 2H) \cdot (15 - 2H) \Rightarrow$$

$$V' = -30H + 4H^2 - 60H + 4H^2 + 450 - 60H - 30H + 4H^2 = 12H^2 - 180H + 450$$

$$V' = 12H^2 - 180H + 450 = 6 \cdot (2H^2 - 30H + 75) \Rightarrow$$

$$V' = 0 \Rightarrow 6 \cdot (2H^2 - 30H + 75) = 0 \Rightarrow 2H^2 - 30H + 75 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = (-30)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 75 = 900 - 600 = 300 > 0 \Rightarrow H = \frac{30 \pm \sqrt{300}}{2 \cdot 2} \Rightarrow \begin{cases} H = \frac{30 + 10\sqrt{3}}{4} \\ H = \frac{30 - 10\sqrt{3}}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$V'' = \frac{d^2V}{dH^2} = 6 \cdot (4H - 30) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} V'' \left(\frac{30 + 10\sqrt{3}}{4} \right) = 6 \cdot \left[4 \left(\frac{30 + 10\sqrt{3}}{4} \right) - 30 \right] = 6 \cdot (30 + 10\sqrt{3} - 30) = 10\sqrt{3} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \\ V'' \left(\frac{30 - 10\sqrt{3}}{4} \right) = 6 \cdot \left[4 \left(\frac{30 - 10\sqrt{3}}{4} \right) - 30 \right] = 6 \cdot (30 - 10\sqrt{3} - 30) = -10\sqrt{3} < 0 \Rightarrow \text{Máximo} \end{cases}$$

$$H = \frac{30 - 10\sqrt{3}}{4} = \frac{15 - 5\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$

$$b) \quad V = \left(30 - 2 \cdot \frac{15 - 5\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \left(15 - 2 \cdot \frac{15 - 5\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \frac{15 - 5\sqrt{3}}{2}$$

$$V = (30 - 15 + 5\sqrt{3}) \cdot (15 - 15 + 5\sqrt{3}) \cdot \frac{15 - 5\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2} (15 + 5\sqrt{3}) \cdot (15 + 5\sqrt{3})$$

$$V = \frac{5\sqrt{3}}{2} (15^2 - 5^2 \cdot 3) = \frac{5\sqrt{3}}{2} (225 - 75) = \frac{5 \cdot 150 \cdot \sqrt{3}}{2} = 5 \cdot 75 \cdot \sqrt{3} = 375 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}^3$$

B Considera el triángulo de vértices $A(0,0,1)$, $B(3,-\sqrt{30},0)$, $C(3,\sqrt{30},0)$

a) Calcula cuánto vale cada uno de sus ángulos.

b) Justifica si se trata de un triángulo isósceles.

a) Calcularemos los ángulos formados por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ que nos darán los ángulos pedidos.

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3, -\sqrt{30}, 0) - (0, 0, 1) = (3, -\sqrt{30}, -1) \\ \overrightarrow{AC} = (3, \sqrt{30}, 0) - (0, 0, 1) = (3, \sqrt{30}, -1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\cos \alpha = \frac{(3, -\sqrt{30}, -1) \cdot (3, \sqrt{30}, -1)}{\sqrt{3^2 + (-\sqrt{30})^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{3^2 + (\sqrt{30})^2 + (-1)^2}} = \frac{9 - 30 + 1}{\sqrt{9 + 30 + 1} \cdot \sqrt{9 + 30 + 1}}$$

$$\cos \alpha = \frac{-20}{\sqrt{40} \cdot \sqrt{40}} = -\frac{20}{40} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^\circ = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

Como $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$ el triángulo es isósceles.

$$\cos \beta = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -(3, -\sqrt{30}, -1) = (-3, \sqrt{30}, 1) \\ \overrightarrow{BC} = (3, \sqrt{30}, 0) - (3, -\sqrt{30}, 0) = (0, 2\sqrt{30}, 0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\cos \beta = \frac{(-3, \sqrt{30}, 1) \cdot (0, 2\sqrt{30}, 0)}{\sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{30})^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0^2 + (2\sqrt{30})^2 + 0^2}} = \frac{0 + 60 + 0}{\sqrt{9 + 30 + 1} \cdot \sqrt{120}}$$

$$\cos \beta = \frac{60}{\sqrt{40} \cdot \sqrt{120}} = \frac{60}{\sqrt{4800}} = \frac{60}{10\sqrt{48}} = \frac{6}{\sqrt{48}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

$$\cos \gamma = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}|} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = -(3, \sqrt{30}, -1) = (-3, -\sqrt{30}, 1) \\ \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC} = -(0, 2\sqrt{30}, 0) = (0, -2\sqrt{30}, 0) \end{cases}$$

$$\cos \gamma = \frac{(-3, -\sqrt{30}, 1) \cdot (0, -2\sqrt{30}, 0)}{\sqrt{(-3)^2 + (-\sqrt{30})^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0^2 + (-2\sqrt{30})^2 + 0^2}} = \frac{60}{\sqrt{40} \cdot \sqrt{1200}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

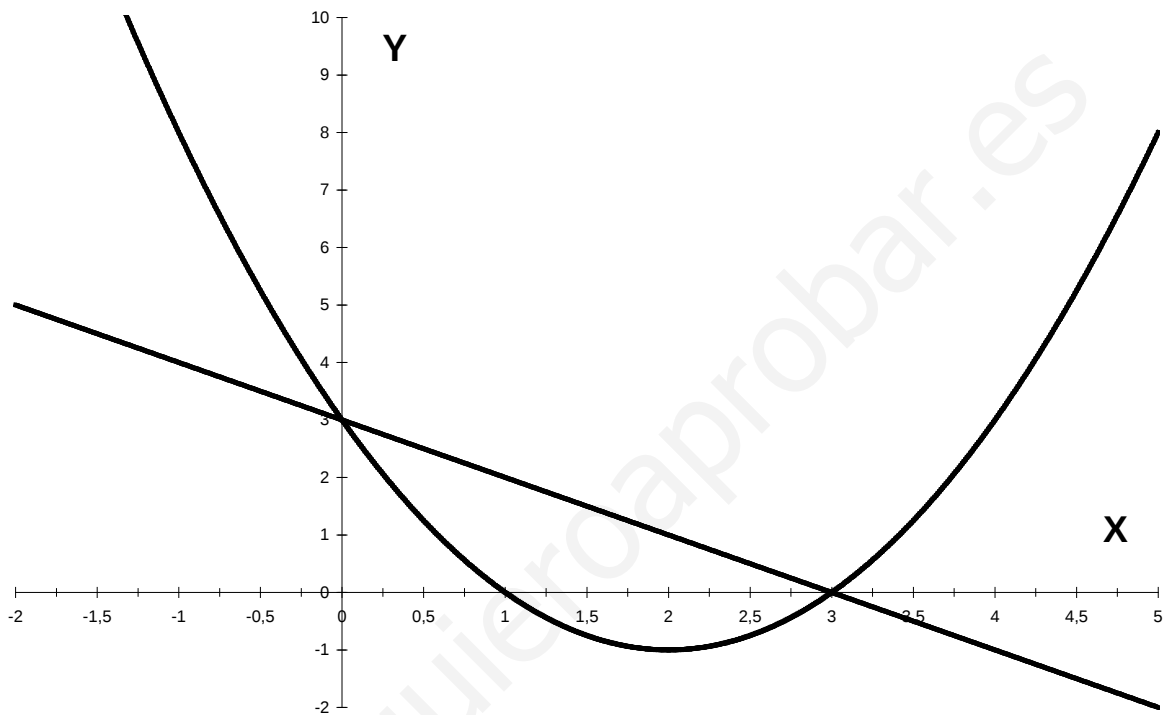
$$\gamma = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

TERCER BLOQUE

A Dada la curva de ecuación $y = x^2 - 4x + 3$ y la recta $y = -x + 3$

- Dibuja la gráfica de la parábola y de la recta.
- Señala el recinto plano comprendido entre ambas.
- Calcula el área del recinto plano señalado.

a)



c)

$$A = \int_0^3 (-x + 3) dx - \int_0^3 (x^2 - 4x + 3) dx = \int_0^3 (-x^2 + 3x) dx = -\frac{1}{3} [x^3]_0^3 + 3 \cdot \frac{1}{2} [x^2]_0^3$$

$$A = -\frac{1}{3} (3^3 - 0^3) + \frac{3}{2} (3^2 - 0^2) = -\frac{27}{3} + \frac{27}{2} = -9 + \frac{27}{2} = \frac{9}{2} u^2$$

B Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula una matriz X tal que $A^2 + AX = I$.

b) ¿Existe la inversa de la matriz X ? Justifica tu respuesta.

a)

$$AX = I - A^2 \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(I - A^2) \Rightarrow IX = A^{-1}I - A^{-1}AA \Rightarrow X = A^{-1}I - IA \Rightarrow X = A^{-1}I - A$$

$$X = A^{-1} - A$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{adj } A^t) \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{adj } A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

b)

$$\text{Existe inversa si } |X| \neq 0 \Rightarrow |X| = \begin{vmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{5}{9} + \frac{16}{9} = \frac{25}{9} \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } X^{-1}$$

CUARTO BLOQUE

A Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x^2 + 2} & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 4x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Determina los intervalos de continuidad. b) Determina los intervalos de derivabilidad.

$$\begin{cases} f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{4}{0^2 + 2} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 2 = 2 \end{cases} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Rightarrow \text{Continua en } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{8x}{(x^2 + 2)^2} & \text{si } x < 0 \\ 2x - 4 & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -\frac{8 \cdot 0}{(0^2 + 2)^2} = \frac{0}{4} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 2 \cdot 0 - 4 = -4 \end{cases}$$

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -4 \Rightarrow \text{Es derivable para } \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

B Dados los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $C(0,0,3)$, sean A' el simétrico de A respecto de B , B' el simétrico de B respecto de C y C' el simétrico de C respecto de A .

Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos A' , B' , y C' .

$$\begin{aligned} \text{Punto } A' &\Rightarrow \begin{cases} 0 = \frac{1+x_{A'}}{2} \Rightarrow 1+x_{A'} = 0 \Rightarrow x_{A'} = -1 \\ 2 = \frac{0+y_{A'}}{2} \Rightarrow y_{A'} = 4 \\ 0 = \frac{0+z_{A'}}{2} \Rightarrow z_{A'} = 0 \end{cases} \Rightarrow A'(-1, 4, 0) \\ \text{Punto } B' &\Rightarrow \begin{cases} 0 = \frac{0+x_{B'}}{2} \Rightarrow x_{B'} = 0 \\ 0 = \frac{2+y_{B'}}{2} \Rightarrow y_{B'} + 2 = 0 \Rightarrow y_{B'} = -2 \Rightarrow B'(0, -2, 6) \\ 3 = \frac{0+z_{B'}}{2} \Rightarrow z_{B'} = 6 \end{cases} \\ \text{Punto } C' &\Rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{0+x_{C'}}{2} \Rightarrow x_{C'} = 2 \\ 0 = \frac{0+y_{C'}}{2} \Rightarrow y_{C'} = 0 \Rightarrow C'(2, 0, -3) \\ 0 = \frac{3+z_{C'}}{2} \Rightarrow 3+z_{C'} = 0 \Rightarrow z_{C'} = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

Los vectores $A'B'$, $A'C'$ y $A'G$, siendo G el punto genérico del plano son coplanarios (están en el mismo plano) y el último es combinación lineal de los otros dos y por ello el determinante de la matriz que forman es nula y la ecuación del plano π pedida.

$$\begin{cases} \overrightarrow{A'B'} = (0, -2, 6) - (-1, 4, 0) = (1, -6, 6) \\ \overrightarrow{A'C'} = (2, 0, -3) - (-1, 4, 0) = (3, -4, -3) \\ \overrightarrow{A'G} = (x, y, z) - (-1, 4, 0) = (x+1, y-4, z) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-4 & z \\ 1 & -6 & 6 \\ 3 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$18(x+1) + 18(y-4) - 4z + 18z + 24(x+1) + 3(y-4) = 0 \Rightarrow$$

$$42(x+1) + 21(y-4) + 14z = 0 \Rightarrow 6(x+1) + 3(y-4) + 2z = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 6x + 3y + 2z - 6 = 0$$