

PRIMER BLOQUE

A Calcula $\int (x^2 + 2x + 1) Lx dx$ ($L = \text{logaritmo neperiano}$).

$$I = \int (x^2 + 2x + 1) Lx dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right) Lx - \int \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right) \frac{dx}{x}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Lx = u \Rightarrow \frac{dx}{x} = du \\ \int (x^2 + 2x + 1) dx = dv \Rightarrow v = \int (x^2 + 2x + 1) dx = \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} + x = \frac{x^3}{3} + x^2 + x \end{array} \right.$$

$$I = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right) Lx - \int \left(\frac{x^2}{3} + x + 1 \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right) Lx - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$$

$$I = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right) Lx - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + x + K$$

B Calcula x para que el volumen del tetraedro determinado por los vectores $\vec{u}(3, -3, 1)$, $\vec{v}(2, 1, 2)$ y $\vec{w}(1, 5, x)$ sea igual a 30 unidades de volumen. Halla el área de la cara determinada por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| \vec{u} \cdot \left(\vec{v} \times \vec{w} \right) \right| \Rightarrow \vec{u} \cdot \left(\vec{v} \times \vec{w} \right) = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & x \end{vmatrix} = 3x - 6 + 10 - 1 - 30 + 6x = 9x - 27 \Rightarrow$$

$$30 = \frac{1}{6} \cdot (9x - 27) \Rightarrow 180 = 9x - 27 \Rightarrow 9x = 207 \Rightarrow x = \frac{207}{9} = 23 u$$

Superficie cara determinada por $\vec{u}$ y $\vec{v} = \left| \vec{u} \times \vec{v} \right| \Rightarrow$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = 3\vec{k} - 6\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{i} - 6\vec{j} + 6\vec{k} = -7\vec{i} - 4\vec{j} + 9\vec{k} \Rightarrow$$

$$S = \left| \vec{u} \times \vec{v} \right| = \sqrt{(-7)^2 + (-4)^2 + 9^2} = \sqrt{49 + 16 + 81} = \sqrt{146} u^2$$

SEGUNDO BLOQUE

A Se toma una cuerda de 5 metros de longitud y se unen los extremos. Construimos con ella triángulos isósceles de diferentes medidas. Calcula las dimensiones del que tiene mayor área.

Los lados iguales son **A** y la base, diferente, **B** y su altura **H**

$$\left\{ \begin{array}{l} 2A + B = 5 \Rightarrow B = 5 - 2A \\ \left(\frac{B}{2}\right)^2 + H^2 = A^2 \Rightarrow H^2 = A^2 - \frac{B^2}{4} = A^2 - \frac{(5-2A)^2}{4} = \frac{4A^2 - 25 + 20A - 4A^2}{4} = \frac{-25 + 20A}{4} \\ S = \frac{1}{2} \cdot BH \end{array} \right.$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot (5 - 2A) \cdot \frac{\sqrt{20A - 25}}{2} = \frac{1}{4} \cdot (5 - 2A) \cdot \sqrt{20A - 25} \Rightarrow$$

$$S' = \frac{dS}{dA} = \frac{1}{4} \cdot \left[(-2) \cdot \sqrt{20A - 25} + \frac{20 \cdot (5 - 2A)}{2\sqrt{20A - 25}} \right] = \frac{1}{4} \cdot \left[(-2) \cdot \sqrt{20A - 25} + \frac{10 \cdot (5 - 2A)}{\sqrt{20A - 25}} \right]$$

$$S' = \frac{2}{4} \cdot \left[\frac{10 \cdot (5 - 2A)}{\sqrt{20A - 25}} - \sqrt{20A - 25} \right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{10 \cdot (5 - 2A) - 20A + 25}{\sqrt{20A - 25}} \right]$$

$$S' = \frac{1}{2} \cdot \frac{50 - 20A - 20A + 25}{\sqrt{20A - 25}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{75 - 40A}{\sqrt{20A - 25}} = \frac{15}{2} \cdot \frac{5 - 4A}{\sqrt{20A - 25}} \Rightarrow$$

$$S' = 0 \Rightarrow \frac{15}{2} \cdot \frac{5 - 4A}{\sqrt{20A - 25}} = 0 \Rightarrow 5 - 4A = 0 \Rightarrow 4A = 5 \Rightarrow A = \frac{5}{4}$$

$$S'' = \frac{d^2S}{dA^2} = \frac{15}{2} \cdot \left[\frac{(-4) \cdot \sqrt{20A - 25} - \frac{20 \cdot (5 - 4A)}{2\sqrt{20A - 25}}}{(20A - 25)} \right] = \frac{15}{2} \cdot \left[\frac{(-4) \cdot \sqrt{20A - 25} - \frac{10 \cdot (5 - 4A)}{\sqrt{20A - 25}}}{(20A - 25)} \right]$$

$$S'' = \frac{15}{2} \cdot \left[\frac{(-4) \cdot (20A - 25) - 10 \cdot (5 - 4A)}{(20A - 25)\sqrt{20A - 25}} \right] = \frac{15}{2} \cdot \left[\frac{-80A + 100 - 50 + 40A}{(20A - 25)\sqrt{20A - 25}} \right]$$

$$S'' = \frac{15}{2} \cdot \left[\frac{-40A + 50}{(20A - 25)\sqrt{20A - 25}} \right] = \frac{75}{2} \cdot \left[\frac{-4A + 5}{(20A - 25)\sqrt{20A - 25}} \right] \Rightarrow$$

$$S''\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{75}{2} \cdot \left[\frac{-4 \cdot \left(\frac{5}{4}\right) + 5}{\left(20 \cdot \left(\frac{5}{4}\right) - 25\right)\sqrt{20 \cdot \left(\frac{5}{4}\right) - 25}} \right] = \frac{75}{2} \cdot \left[\frac{-10 + 5}{\left(\frac{100}{4} - 25\right)\sqrt{\frac{100}{4} - 25}} \right]$$

Continuación del problema A del Segundo Bloque

$$S''\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{75}{2} \cdot \left(\frac{-5}{\left(\frac{25}{3}\right)\sqrt{\frac{25}{3}}} \right) = \frac{75}{2} \cdot \left(\frac{-15}{25 \cdot \frac{5}{\sqrt{3}}} \right) = \frac{3 \cdot (-15)\sqrt{3}}{2 \cdot 5} = \frac{(-9)\sqrt{3}}{2} < 0 \Rightarrow \text{Máximo}$$

$$\begin{cases} A = \frac{3}{5}m \\ B = 5 - 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right) = 5 - \frac{6}{5} = \frac{19}{5}m. \end{cases}$$

B Si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 5$

a) Calcula el valor de $\begin{vmatrix} 3a-b & 6a+2b \\ 3c-d & 6c+2d \end{vmatrix}$

b) Enuncia las propiedades de los determinantes que hayas usado en el apartado anterior.

a)

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 3a & 6a+2b \\ 3c & 6c+2d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & 6a+2b \\ d & 6c+2d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3a & 6a+2b \\ 3c & 6c+2d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -b & 6a+2b \\ -d & 6c+2d \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} 3a & 6a \\ 3c & 6c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3a & 2b \\ 3c & 2d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -b & 6a \\ -d & 6c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -b & 2b \\ -d & 2d \end{vmatrix} = \\ & = 3 \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} + 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + (-1) \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} + (-1) \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} b & b \\ d & d \end{vmatrix} = \\ & = 3 \cdot 6 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot 5 + (-6) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + (-1) \cdot 2 \cdot 0 = 30 + 6 \cdot 5 = 30 + 30 = 60 \end{aligned}$$

TERCER BLOQUE

A Enuncia la Regla de L'Hôpital y calcula el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos 2x - \sin 2x}{x^3}$

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuas en $[a, b]$, derivables en (a, b) , que cumplen

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ siendo $x_0 \in (a, b)$ y tales que $g'(x) \neq 0$ para todo valor de x en el

intervalo (a, b) . Entonces, si $f(x_0) = g(x_0) = 0$ y existe el $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, se tiene que también existe el

límite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ y, además, estos límites son iguales: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos 2x - \sin 2x}{x^3} &= \frac{2 \cdot 0 \cdot \cos 2 \cdot 0 - \sin 2 \cdot 0}{0^3} = \frac{0 \cdot 1 - \sin 0}{0} = \frac{0}{0} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\cos 2x - 2x \sin 2x) - 2 \cdot \cos 2x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2x - 4x \sin 2x - 2 \cdot \cos 2x}{3x^2} = \\
 &= \frac{2 \cos 2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 \cdot \sin 2 \cdot 0 - 2 \cdot \cos 2 \cdot 0}{3 \cdot 0^2} = \frac{2 \cdot 1 - 0 \cdot 0 - 2 \cdot \cos 0}{0} = \frac{2 - 0 - 2 \cdot 1}{0} = \frac{0}{0} = \\
 &= \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \sin 2x - 4(\sin 2x + 2x \cos 2x) + 4 \cdot \sin 2x}{6x} = \\
 &= \frac{-4 \sin 2 \cdot 0 - 4(\sin 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot \cos 2 \cdot 0) + 4 \cdot \sin 2 \cdot 0}{6 \cdot 0} = \frac{-4 \cdot 0 - 4(0 + 2 \cdot 0 \cdot 1) + 4 \cdot 0}{0} = \frac{0}{0} = \\
 &= \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-8 \cos 2x - 4(2 \cos 2x + 2 \cos 2x - 4x \sin 2x) + 8 \cdot \cos 2x}{6} = \\
 &= \frac{-8 \cos 0 - 4(2 \cos 0 + 2 \cos 0 - 4 \cdot 0 \cdot \sin 0) + 8 \cdot \cos 0}{6} = \frac{-8 - 4(2 + 2 - 0) + 8}{6} = \\
 &= \frac{-8 - 4(2 + 2 - 0) + 8}{6} = \frac{-16}{6} = -\frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

B Dados los puntos $A(2,0,3)$, $B(-4,0,5)$ y el plano $\pi \equiv y - z = 0$. Halla la distancia entre los puntos A' y C , siendo A' el simétrico de A respecto al plano π y C el punto medio del segmento $\overline{AB}$

Hallaremos una recta r que pasando por A sea perpendicular al plano π , como el vector director de este es perpendicular a él, este será el vector director de dicha recta.

Una vez obtenida la recta r hallaremos el punto P de corte de ella con el plano que es el punto medio entre A y su simétrico A' lo que nos permitirá obtener el simétrico

Hallado el punto C como punto medio de AB , hallaremos la distancia pedida

$$\vec{v}_r = \vec{v}_\pi = (0, 1, -1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = \lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{Punto } P \text{ de corte de la recta } r \text{ con } \pi \Rightarrow \lambda - (3 - \lambda) = 0 \Rightarrow 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2}$$

$$P \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{3}{2} \\ z = 3 - \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow P\left(2, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} 2 = \frac{2 + x_{A'}}{2} \Rightarrow 2 + x_{A'} = 4 \Rightarrow x_{A'} = 2 \\ \frac{3}{2} = \frac{0 + y_{A'}}{2} \Rightarrow 2y_{A'} = 6 \Rightarrow y_{A'} = 3 \\ \frac{3}{2} = \frac{3 + z_{A'}}{2} \Rightarrow 6 + 2z_{A'} = 6 \Rightarrow z_{A'} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_C = \frac{2 + (-4)}{2} = -1 \\ y_C = \frac{0 + 0}{2} = 0 \\ z_C = \frac{3 + 5}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A'(2, 3, 0) \\ C(-1, 0, 4) \end{cases} \Rightarrow d(A', C) = \sqrt{[2 - (-1)]^2 + (3 - 0)^2 + (0 - 4)^2}$$

$$d(A', C) = \sqrt{3^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{34} \text{ u}$$

CUARTO BLOQUE

A La función $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} ax + bx^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ c + \sqrt{x-1} & \text{si } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$ es derivable en el intervalo $(0,5)$ y verifica que $f(0)=f(5)$. ¿Cuánto valen a , b y c ?

Para ser derivable, primero debe de ser continua

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = a \cdot 2 + b \cdot 2^2 = 2a + 4b \\ f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = c + \sqrt{2-1} = c + 1 \end{cases} \Rightarrow f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Rightarrow 2a + 4b = c + 1$$

Derivable

$$f'(x) = \begin{cases} a + 2bx & \text{si } 0 < x < 2 \\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{si } 2 < x < 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = a + 2b \cdot 2 = a + 4b \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2-1}} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) \Rightarrow a + 4b = \frac{1}{2} \Rightarrow 2a + 8b = 1$$

$$\begin{cases} f(0) = a \cdot 0 + b \cdot 0^2 = 0 \\ f(5) = c + \sqrt{5-1} = c + 2 \end{cases} \Rightarrow c + 2 = 0 \Rightarrow c = -2 \Rightarrow \begin{cases} 2a + 4b = -2 + 1 \\ -2a - 8b = -1 \end{cases} \Rightarrow -4b = -2 \Rightarrow 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \Rightarrow 2a + 4 \cdot \frac{1}{2} = -1 \Rightarrow 2a + 2 = -1 \Rightarrow 2a = -3 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

B Considera el sistema de ecuaciones que depende de un parámetro real λ :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ 5x + \lambda y + z = 6 \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores de λ

b) Resuelve para $\lambda = 8$.

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = 3 + 10 - 2\lambda + 15 - \lambda - 4 = -3\lambda + 24 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow -3\lambda + 24 = 0 \Rightarrow \lambda = 8$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R} - \{8\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sist.Comp. Determinado}$

Continuación del problema B del Cuarto Bloque

a) Continuación

Si $\lambda = 8$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 1 & 6 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 & -4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{La tercera ecuación es}$$

combinación lineal de las otras dos $\Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow -y + 3z = -2 \Rightarrow y = 2 + 3z \Rightarrow x + 2 \cdot (2 + 3z) - z = 2 \Rightarrow$$

$$x + 4 + 6z - z = 2 \Rightarrow x = -2 - 5z \Rightarrow \text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = (-2 - 5\lambda, 2 + 3\lambda, \lambda)$$