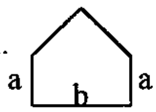
PRIMER BLOQUE

A. El perímetro de la ventana del dibujo mide 6 metros. Los dos lados superiores forman entre sí un ángulo de 90º.
Calcula la longitud de los lados *a* y *b* para que el área de la ventana sea máxima.



Llamando **C** a los dos lados superiores y **h** a la altura del triángulo rectángulo isósceles

$$\begin{cases} c^2+c^2=b^2 \Rightarrow 2c^2=b^2 \Rightarrow c^2=\frac{b^2}{2} \Rightarrow c=\sqrt{\frac{b^2}{2}}=\frac{b}{\sqrt{2}}=\frac{b\sqrt{2}}{2} \\ h^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2=c^2 \Rightarrow h^2+\frac{b^2}{4}=\frac{b^2}{2} \Rightarrow h^2=\frac{b^2}{2}-\frac{b^2}{4}=\frac{b^2}{4} \Rightarrow h=\sqrt{\frac{b^2}{4}}=\frac{b}{2} \\ 6=2a+b+2c \Rightarrow 6=2a+b+2\cdot\frac{b\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 6=2a+b\left(1+\sqrt{2}\right) \Rightarrow 2a=6-b\left(1+\sqrt{2}\right) \Rightarrow \\ A=a.b+\frac{1}{2}bh=b\cdot\left(a+\frac{h}{2}\right)=b\cdot\left(a+\frac{\frac{b}{2}}{2}\right)=b\cdot\left(a+\frac{b}{4}\right)=\frac{b}{4}\cdot(4a+b) \end{cases}$$

$$A=\frac{b}{4}\cdot\left[12-2b\left(1+\sqrt{2}\right)+b\right]=\frac{b}{4}\cdot\left[12-2b\left(1+\sqrt{2}\right)+2\cdot\frac{b}{2}\right]=\frac{b}{4}\cdot\left[12-2b\left(1+\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$A=\frac{b}{4}\cdot\left[12-2b\left(\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)\right]=\frac{b}{4}\cdot\left[12-2b\left(\frac{1+2\sqrt{2}}{2}\right)\right]=\frac{b}{4}\cdot\left[12-b\cdot\left(1+2\sqrt{2}\right)\right]$$

$$A=\frac{1}{4}\left[12b-b^2\cdot\left(1+2\sqrt{2}\right)\right]$$

$$A'=\frac{dA}{db}=\frac{1}{4}\cdot\left[12-2b\cdot\left(1+2\sqrt{2}\right)\right]=\frac{1}{2}\cdot\left[6-b\cdot\left(1+2\sqrt{2}\right)\right] \Rightarrow$$

$$A'=0 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\left[6-b\cdot\left(1+2\sqrt{2}\right)\right]=0 \Rightarrow 6-b\cdot\left(1+2\sqrt{2}\right)=0 \Rightarrow b\cdot\left(1+2\sqrt{2}\right)=6 \Rightarrow$$

$$b=\frac{6}{1+2\sqrt{2}} \Rightarrow A''=\frac{d^2A}{db^2}=\frac{-\left(1+2\sqrt{2}\right)}{2}<0 \Rightarrow Máximo \Rightarrow$$

Continuación del Problema A del Primer Bloque

$$\begin{cases} b = \dfrac{6}{1+2\sqrt{2}} \\ a = 3 - \dfrac{b\left(1+\sqrt{2}\right)}{2} \Rightarrow a = 3 - \dfrac{6\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)}{2\left(1+2\sqrt{2}\right)} = 3 - \dfrac{3\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)}{1+2\sqrt{2}} = \dfrac{3+6\sqrt{2}-3-3\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \dfrac{6\cdot\left(1-2\sqrt{2}\right)}{\left(1+2\sqrt{2}\right)\left(1-2\sqrt{2}\right)} = \dfrac{6\cdot\left(1-2\sqrt{2}\right)}{1^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2} = \dfrac{6\cdot\left(1-2\sqrt{2}\right)}{1-8} = \dfrac{6\cdot\left(1-2\sqrt{2}\right)}{-7} = \dfrac{6\cdot\left(2\sqrt{2}-1\right)}{7}\ m \\ a = \dfrac{3\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}} = \dfrac{3\left(1-2\sqrt{2}\right)\sqrt{2}}{\left(1+2\sqrt{2}\right)\left(1-2\sqrt{2}\right)} = \dfrac{3\left(1-2\sqrt{2}\right)\sqrt{2}}{-8} = \dfrac{3\left(2\sqrt{2}-1\right)\sqrt{2}}{7}\ m \end{cases}$$

B. Utiliza las propiedades de los determinantes para desarrollar el siguiente:

$$\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 3x+2 \\ x & 2x+3 & 3x+4 \\ x & 2x+5 & 3x+6 \end{vmatrix}$$

Enuncia las propiedades que has utilizado.

$$\begin{vmatrix} x & 2x & 3x+2 \\ x & 2x & 3x+4 \\ x & 2x & 3x+6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 3x+2 \\ x & 3 & 3x+4 \\ x & 5 & 3x+6 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} x & x & 3x+2 \\ x & x & 3x+4 \\ x & x & 3x+6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 3x+2 \\ x & 3 & 3x+4 \\ x & 5 & 3x+6 \end{vmatrix} = 2\cdot 0 + \begin{vmatrix} x & 1 & 3x \\ x & 3 & 3x \\ x & 5 & 3x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x & 3 & 4 \\ x & 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + 3\cdot\begin{vmatrix} x & 1 & x \\ x & 3 & x \\ x & 5 & x \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x & 3 & 2 \\ x & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 3\cdot 0 + 2\cdot\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x & 3 & 2 \\ x & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x & 3 & 2 \\ x & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2x\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2x\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4x\cdot 0 = 0$$

SEGUNDO BLOQUE

A. Enuncia la regla de L'Hôpital. Calcula el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{L(1+x)} - \dfrac{1}{x}\right)$.

(L= logaritmo neperiano)

Sean **f(x)** y **g(x)** funciones continuas en **[a , b]**, derivables en **(a , b)**, que cumplen $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ siendo $x_0 \in (a\ ,b)$ y tales que $g'(x) \neq 0$ para todo valor de x en el intervalo **(a , b)**. Entonces, si $\mathbf{f(x_0) = g(x_0) = 0}$ y existe el $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, se tiene que también existe el límite $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ y, además, estos límites son iguales: $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Continuación del Problema A del Segundo Bloque

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{L\left(1+x\right)}-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{L\left(1+0\right)}-\frac{1}{0}=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty=\lim_{x\to 0}\frac{x-L\left(1+x\right)}{x\,L\left(1+x\right)}=\frac{0-L\left(1+0\right)}{0\,L\left(1+0\right)}=$$

$$=\frac{0}{0}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x}}{L\left(1+x\right)+\dfrac{x}{1+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1+x-1}{1+x}}{\dfrac{\left(1+x\right)L\left(1+x\right)+x}{1+x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\left(1+x\right)L\left(1+x\right)+x}=\frac{0}{\left(1+0\right)\cdot L\left(1+0\right)+0}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\dfrac{1+x}{1+x}+L\left(1+x\right)+1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+L\left(1+x\right)+1}=\frac{1}{2+L\left(1+0\right)}=\frac{1}{2+0}=\frac{1}{2}$$

B. Las rectas de ecuaciones $r\equiv\begin{cases}x+y-z&=&4\\x+2y&=&7\end{cases}$, $s\equiv\begin{cases}x=2\\y=-5\end{cases}$ se cruzan en el espacio.

a) Escribe las ecuaciones paramétricas de ambas rectas.

b) Halla un punto de *r* y otro de *s* tales que el vector con origen en uno y extremo en el otro sea perpendicular a ambas rectas.

a)

$$\begin{cases}x=7-2y\Rightarrow 7-2y+y-z=4\Rightarrow z=7-y-4\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=7-2\lambda\\y=\lambda\\z=3-\lambda\end{cases}\\[2ex] s\equiv\begin{cases}x=2\\y=-5\\z=\mu\end{cases}\end{cases}$$

Continuación del Problema B del Segundo Bloque

b) El vector director de la recta **t** se obtendrá como apoyo en los puntos generales de las dos rectas y es perpendicular a las dos por lo tanto los productos escalares de ese vector con el de **r** es nulo y lo mismo con el vector director de **s**, de las ecuaciones obtenidas obtendremos constantes para determinar los puntos **R** y **S** pedidos

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_t} = [7-2\lambda-2\,,\lambda-(-5)\,,3-\lambda-\mu] = (5-2\lambda\,,\lambda+5\,,3-\lambda-\mu) \\ \overrightarrow{v_r} = (-2\,,1\,,-1) \\ \overrightarrow{v_s} = (0\,,0\,,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_t} \perp \overrightarrow{v_r} \Rightarrow \overrightarrow{v_t}.\overrightarrow{v_r} = 0 \\ \overrightarrow{v_t} \perp \overrightarrow{v_s} \Rightarrow \overrightarrow{v_t}.\overrightarrow{v_s} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (5-2\lambda\,,\lambda+5\,,3-\lambda-\mu)\cdot(-2\,,1\,,-1) = 0 \Rightarrow -10+4\lambda+\lambda+5-3+\lambda+\mu = 0 \\ (5-2\lambda\,,\lambda+5\,,3-\lambda-\mu)\cdot(0\,,0\,,1) = 0 \Rightarrow 3-\lambda-\mu = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6\lambda+\mu-8 = 0 \\ 3-\lambda-\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow 5\lambda-5 = 0 \Rightarrow 5\lambda = 5 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow 3-1-\mu = 0 \Rightarrow 2-\mu = 0 \Rightarrow \mu = 2$$

$$R\begin{cases} x = 7-2\cdot 1 \\ y = 1 \\ z = 3-1 \end{cases} \Rightarrow R(5\,,1\,,2) \qquad S\begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow S(2\,,-5\,,2)$$

TERCER BLOQUE

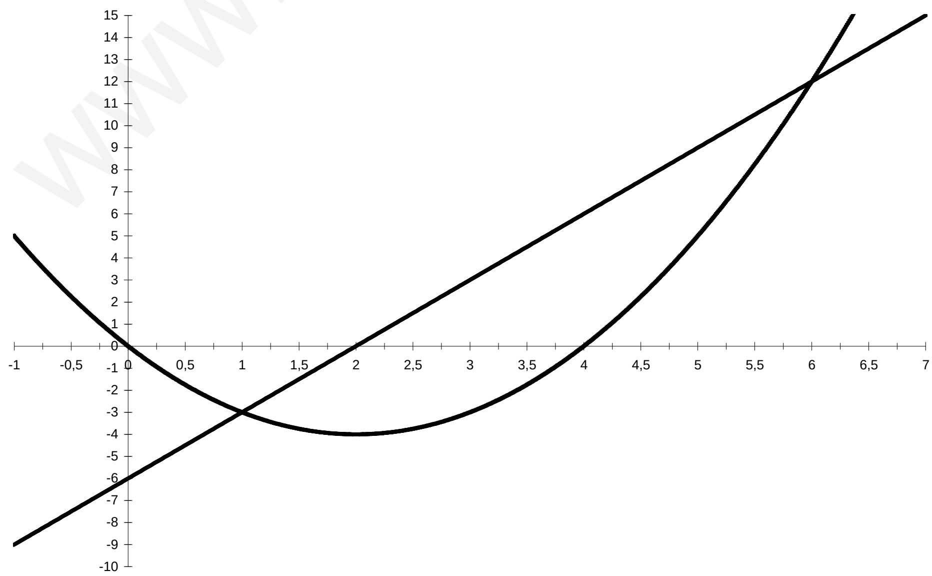
A. Dada la curva $y = x^2 - 4x$ y la recta $y = 3x - 6$:

a) Dibuja la gráfica de ambas.

b) Señala el recinto plano comprendido entre ellas.

c) Calcula el área del recinto señalado.

a) y b)



Continuación del Problema A del Tercer Bloque

$$Puntos\ de\ corte\ con\ el\ eje\ OX \Rightarrow y=0 \Rightarrow \begin{cases} 3x-6=0 \Rightarrow 3x=6 \Rightarrow x=2 \\ x^2-4x=0 \Rightarrow (x-4)x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-4=0 \Rightarrow x=4 \end{cases} \end{cases}$$

$$Puntos\ de\ corte\ entre\ funciones \Rightarrow x^2-4x=3x-6 \Rightarrow x^2-7x+6=0 \Rightarrow \Delta=(-7)^2-4\cdot 1\cdot 6=25$$

$$x=\frac{7\pm\sqrt{25}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{7+5}{2}=6 \\ x=\frac{7-5}{2}=1 \end{cases}$$

$$A=\left|\int_1^2 \left(x^2-4x\right)dx\right|-\left|\int_1^2 (3x-6)\,dx\right|+\int_2^6 (3x-6)\,dx-\int_2^6 \left(x^2-4x\right)dx=$$

$$A=-\int_1^2 \left(x^2-4x\right)dx+\int_1^2 (3x-6)\,dx+\int_2^6 (3x-6)\,dx-\int_2^6 \left(x^2-4x\right)dx=\int_1^6 (3x-6)\,dx-\int_1^6 \left(x^2-4x\right)dx=$$

$$A=\int_1^6 \left(3x-6-x^2+4x\right)dx=\int_1^6 \left(-x^2+7x-6\right)dx=-\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_1^6+7\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_1^6-6\cdot[x]_1^6$$

$$A=-\frac{1}{3}\cdot\left(6^3-1^3\right)+\frac{7}{2}\cdot\left(6^2-1^2\right)-6\cdot(6-1)=-\frac{125}{3}+\frac{7\cdot 35}{2}-30=\frac{-250+735-180}{6}=\frac{305}{6}\,u^2$$

B. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, donde λ es un número real.

Encuentra los valores de λ para los que la matriz $A\cdot B$ es invertible.

Para que una matriz tenga inversa es condición necesaria que su determinante no sea nulo

$$A.B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+2\lambda & 3+2\lambda \\ 1-\lambda & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$|A.B|=\begin{vmatrix} 1+2\lambda & 3+2\lambda \\ 1-\lambda & 1 \end{vmatrix}=1+2\lambda-(1-\lambda)\cdot(3+2\lambda)=1+2\lambda-3-2\lambda+3\lambda+2\lambda^2=2\lambda^2+3\lambda-2$$

$$Si\ |A.B|=0 \Rightarrow 2\lambda^2+3\lambda-2=0 \Rightarrow \Delta=3^2-4\cdot 2\cdot(-2)=9+16=25>0 \Rightarrow \lambda=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{2\cdot 2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda=\frac{-3+5}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \\ \lambda=\frac{-3-5}{4}=-2 \end{cases} \Rightarrow \forall\lambda\in\Re-\left\{-2,\frac{1}{2}\right\} \Rightarrow |A.B|\neq 0 \Rightarrow Existe\ \exists(A\cdot B)$$

CUARTO BLOQUE

A. Determina las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal (recta perpendicular a la tangente) en el punto de abscisa 0, a la gráfica de la función f dada por $f(x) = 2xe^x + \dfrac{x^3-2}{x^2+4}$.

$$f'(x) = 2\cdot\left(e^x + xe^x\right) + \frac{3x^2\left(x^2+4\right) - 2x\left(x^3-2\right)}{\left(x^2+4\right)^2} = 2e^x(1+x) + \frac{3x^4+12x^2-2x^4+4x}{\left(x^2+4\right)^2}$$

$$f'(x) = 2e^x(1+x) + \frac{x^4+12x^2+4x}{\left(x^2+4\right)^2}$$

$$\begin{cases} f(0) = 2\cdot 0\cdot e^0 + \dfrac{0^3-2}{0^2+4} = 0 - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2} \\ f'(0) = 2e^0(1+0) + \dfrac{0^4+12\cdot 0^2+4\cdot 0}{\left(0^2+4\right)^2} = 2\cdot 1\cdot 1 + \dfrac{0}{16} = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$Ec.\,tangente \Rightarrow m = 2 \Rightarrow y - \left(-\frac{1}{2}\right) = 2\cdot(x-0) \Rightarrow y + \frac{1}{2} = 2x \Rightarrow y = 2x - \frac{1}{2} \Rightarrow 4x - 2y - 1 = 0$$

$$Ec.\,normal \Rightarrow m' = -\frac{1}{2} \Rightarrow y - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\cdot(x-0) \Rightarrow y + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \Rightarrow x + 2y + 1 = 0$$

B. Considera la recta r dada por $r \equiv \begin{cases} x - 4y + 9 = 0 \\ 3y - z - 9 = 0 \end{cases}$.

a) Determina el plano que pasa por el punto $P(1, 4, 0)$ y contiene a r.

b) ¿Para cualquier valor de λ, el plano $x - 4y + 9 + \lambda(3y - z - 9) = 0$ contiene a r?

c) Determina los valores de λ para que el plano diste 3 unidades del origen de coordenadas.

a) Para hallar el plano π tomaremos el vector director de la recta **r**, el vector formado por un punto **R** cualquiera de la recta **r** (tomaremos el indicado en su ecuación) y por el punto **P** y el vector formado por **P** y **G**, siendo este punto el generador del plano. Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector **PG** es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano.

$$x = 4y - 9 \Rightarrow z = 3y - 9 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -9 + 4\mu \\ y = \mu \\ z = -9 + 3\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (4, 1, 3) \\ R(-9, 0, -9) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (4, 1, 3) \\ \overrightarrow{PR} = (-9, 0, -9) - (1, 4, 0) = (-10, -4, -9) \equiv (10, 4, 9) \\ \overrightarrow{PR} = (x, y, z) - (1, 4, 0) = (x-1, y-4, z) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-4 & z \\ 4 & 1 & 3 \\ 10 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Continuación del Problema B del Cuarto Bloque

a)Continuación

$$9\cdot(x-1)+30\cdot(y-4)+16z-10z-12\cdot(x-1)-36\cdot(y-4)=0\Rightarrow$$
$$(-3)\cdot(x-1)-6\cdot(y-4)+6z=0\Rightarrow(x-1)+2\cdot(y-4)-2z=0\Rightarrow\pi\equiv x+2y-2z-8=0$$

b) Para que se cumpla tal condición primeramente el producto escalar de los vectores directores de haz de planos y la recta tiene que ser nulo y finalmente debe de contener a un punto cualquiera de la recta (tomaremos **R**)

$$\text{Haz de planos}\Rightarrow x+(3\lambda-4)y-\lambda z+9-9\lambda=0$$

$$\begin{cases} \vec{v_r}=(4,1,3) \\ \vec{v_{HP}}=(1,3\lambda-4,-\lambda)\end{cases}\Rightarrow \vec{v_r}\perp\vec{v_{HP}}\Rightarrow\vec{v_r}\cdot\vec{v_{HP}}=0\Rightarrow(4,1,3)\cdot(1,3\lambda-4,-\lambda)=0\Rightarrow$$
$$4+3\lambda-4-3\lambda=0\Rightarrow0\lambda=0\Rightarrow\text{Infinitas soluciones}\Rightarrow\forall\lambda\in\Re\Rightarrow\text{Vectores perpendiculares}$$

$$\text{Veamos si contiene } R\Rightarrow-9+(3\lambda-4)\cdot0-\lambda\cdot(-9)+9-9\lambda=0\Rightarrow-9+9\lambda+9-9\lambda=0\Rightarrow$$
$$0\lambda=0\Rightarrow\text{Infinitas soluciones}\Rightarrow\forall\lambda\in\Re\Rightarrow\text{Contiene todos los puntos de la recta}$$

c)

$$d(HP,O)=3=\pm\frac{0+(3\lambda-4)\cdot0-\lambda\cdot0+9-9\lambda}{\sqrt{1^2+(3\lambda-4)^2+(-\lambda)^2}}\Rightarrow3\cdot\sqrt{1+(3\lambda-4)^2+\lambda^2}=\pm(9-9\lambda)\Rightarrow$$
$$3\cdot\sqrt{1+9\lambda^2-24\lambda+16+\lambda^2}=\pm9(1-\lambda)\Rightarrow\sqrt{10\lambda^2-24\lambda+17}=\pm3(1-\lambda)\Rightarrow$$
$$10\lambda^2-24\lambda+17=9\cdot(1-\lambda)^2\Rightarrow10\lambda^2-24\lambda+17=9-18\lambda+9\lambda^2\Rightarrow\lambda^2-6\lambda+8=0\Rightarrow$$
$$\Delta=(-6)^2-4\cdot1\cdot8=36-32=4\Rightarrow\lambda=\frac{6\pm\sqrt{4}}{2\cdot1}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=\dfrac{6+2}{2}=4\\ \lambda=\dfrac{6-2}{2}=2\end{cases}$$