

PRIMER BLOQUE

A. Una compañía de venta a domicilio ha determinado que sus beneficios anuales dependen del número de vendedores verificando la expresión: $B(x) = -9x^2 + 360x + 1875$, donde $B(x)$ es el beneficio en miles de euros para x vendedores.

- a) ¿Qué número de vendedores ha de tener la empresa para que sus beneficios sean máximos?
b) ¿Cuál será el valor máximo de los beneficios?

a)

$$B'(x) = -18x + 360 \Rightarrow B'(x) = 0 \Rightarrow -18x + 360 = 0 \Rightarrow 18x = 360 \Rightarrow x = \frac{360}{18} = 20$$

$$B''(x) = -18 < 0 \Rightarrow \text{Máximo} \Rightarrow x = 20 \text{ vendedores}$$

b)

$$B(20) = -9 \cdot 20^2 + 360 \cdot 20 + 1875 = -3600 + 7200 + 1875 = 5475 \text{ miles de euros}$$

b) ¿Cuál será el valor máximo de los beneficios?

B. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \lambda & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ y el sistema lineal en forma matricial $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- a) Determina para qué valores del parámetro λ no tiene inversa la matriz A .
b) Resuelve el sistema para $\lambda = 1$.

a) Una matriz tiene inversa siempre que su determinante no sea nulo

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \lambda & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda + 3\lambda - 4 + 2\lambda^2 = 2\lambda^2 + 2\lambda - 4 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow 2(\lambda^2 + \lambda - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 \geq 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{-1+3}{2} = 1 \\ \lambda = \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} - \{-2, 1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } A^{-1}$$

b)

Sistema homogéneo $\Rightarrow$ Como $|A| = 0 \Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow -y + z = 0 \Rightarrow y = z \Rightarrow$$

$$x + 2z + 3z = 0 \Rightarrow x = -5z \Rightarrow \text{Solución } (x, y, z) = (-5\lambda, \lambda, \lambda)$$

SEGUNDO BLOQUE

A. Dada la función $f(x)$ de ecuación $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 3$:

- Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- Halla los puntos máximos, mínimos y de inflexión de $f(x)$.
- Representa su gráfica.

a)

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6 \cdot (x^2 - 3x + 2) = 6 \cdot (x-1) \cdot (x-2) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \begin{cases} 6 > 0 \\ x > 1 \\ x > 2 \end{cases}$$

$-\infty$	1	2	∞
$6 > 0$	(+)	(+)	(+)
$x > 1$	(-)	(+)	(+)
$x > 2$	(-)	(-)	(+)
Solución	(+)	(-)	(+)

Crecimiento $\forall x \in \mathbb{R} / (x < 1) \cup (x > 2)$

Decrecimiento $\forall x \in \mathbb{R} / 1 < x < 2$

b)

Máximo relativo en $x = 1$ $f(1) = 2 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 + 3 = 2 - 9 + 12 + 3 = 8 \Rightarrow$ De Crecimiento pasa a Decrecimiento

Mínimo relativo en $x = 2$ $f(2) = 2 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 + 3 = 16 - 36 + 24 + 3 = 7 \Rightarrow$ De Decrecimiento pasa a Crecimiento

$$f''(x) = 12x - 18 = 6 \cdot (2x - 3) \quad f''(x) = 0 \Rightarrow 6 \cdot (2x - 3) = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

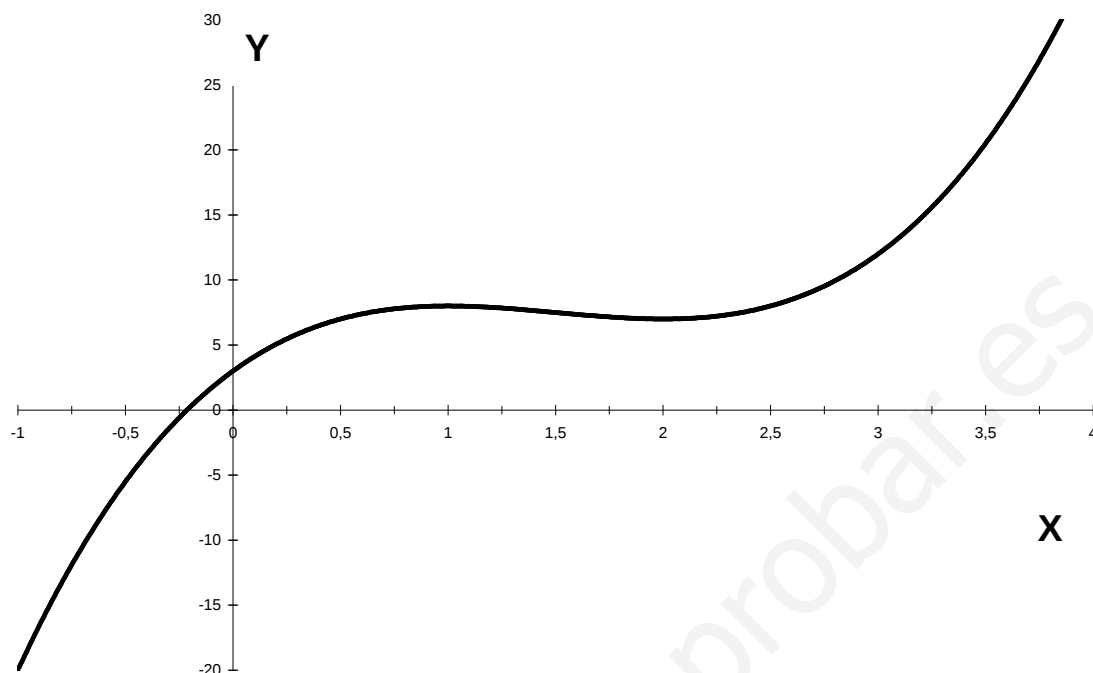
$$f'''(x) = 12 \neq 0$$

$$\text{Punto de inflexión} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 12 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) + 3 = \frac{27}{4} - \frac{81}{4} + 18 + 3$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 21 - \frac{54}{4} = 21 - \frac{27}{2} = \frac{15}{2} \Rightarrow \text{Punto de inflexión} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}, \frac{15}{2}\right)$$

Continuación del Problema A del Segundo Bloque

c)



B. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & k & 2 \\ 12 & 4 & k \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$:

- Calcula los valores de k para los que A no tiene inversa.
- Determina, paso a paso, la inversa de la matriz A para el valor de $k = 3$.

a) Una matriz tiene inversa siempre que su determinante no sea nulo

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & k & 2 \\ 12 & 4 & k \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 24 + 3k^2 + 24 - 24 - 6k - 12k = 3k^2 - 18k + 24 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow 3(k^2 - 6k + 8) = 0$$

$$k^2 - 6k + 8 = 0 \Rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 36 - 32 = 4 \geq 0 \Rightarrow k = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{6+2}{2} = 4 \\ k = \frac{6-2}{2} = 2 \end{cases}$$

$$\forall k \in \mathbb{R} - \{2, 4\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } A^{-1}$$

Continuación del Problema B del Segundo Bloque

b)

$$\text{Con } k = 3 \Rightarrow |A| = 3 \cdot 3^2 - 18 \cdot 3 + 24 = 27 - 54 + 24 = -3 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{adj } A^t) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 12 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj } A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(-3)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

TERCER BLOQUE

A. Determina los números reales a y b para que la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} a e^{\frac{\sin^2 x}{x}} + b \cos x & \text{si } x < 0 \\ 6 & \text{si } x = 0 \\ 3a \frac{\sin x}{x} + b(x-1) & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{sea continua en toda la recta real.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{\sin^2 0}{0} = \frac{0}{0} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\longrightarrow} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{1} = 2 \sin 0 \cdot \cos 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\longrightarrow} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = a \cdot e^{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2 x}{x}} + b \cdot \cos 0 = a \cdot e^0 + b \cdot 1 = a \cdot 1 + b = a + b \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3a \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} + b \cdot (0-1) = 3a \cdot 1 - b = 3a - b \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} a + b = 6 \\ 3a - b = 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$4a = 12 \Rightarrow a = \frac{12}{4} = 3 \Rightarrow 3 + b = 6 \Rightarrow b = 3$$

B. Considera el plano π y la recta r dados por sus ecuaciones .

$$\pi \equiv ax + 2y - 4z + b = 0, \quad r \equiv \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{1}.$$

- a) Calcula los valores de a y b para que r esté contenida en π .
 b) ¿Existen valores de a y b para los que la recta dada r sea perpendicular a π ?

a) Se cumplirán dos condiciones, primera que el producto escalar de los vectores directores, que son entre si perpendiculares, es nulo y segunda que un punto $\mathbf{R}$ cualquiera de la recta r pertenezca al plano (tomaremos el indicado en la ecuación de ella)

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (4, -4, 1) \\ \vec{v}_\pi = (a, 2, -4) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{v}_\pi \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi = 0 \Rightarrow (4, -4, 1) \cdot (a, 2, -4) = 0 \Rightarrow 4a - 8 - 4 = 0$$

$$4a - 12 = 0 \Rightarrow 4a = 12 \Rightarrow a = \frac{12}{4} = 3$$

$$R(3, 1, -3) \Rightarrow a \cdot 3 + 2 \cdot 1 - 4 \cdot (-3) + b = 0 \Rightarrow 3a + 2 + 12 + b = 0 \Rightarrow b = -14 - 3 \cdot 3 = -23$$

b) Para que sean perpendiculares sus vectores directores, son paralelos, son iguales o proporcionales, si no se cumple no lo son.

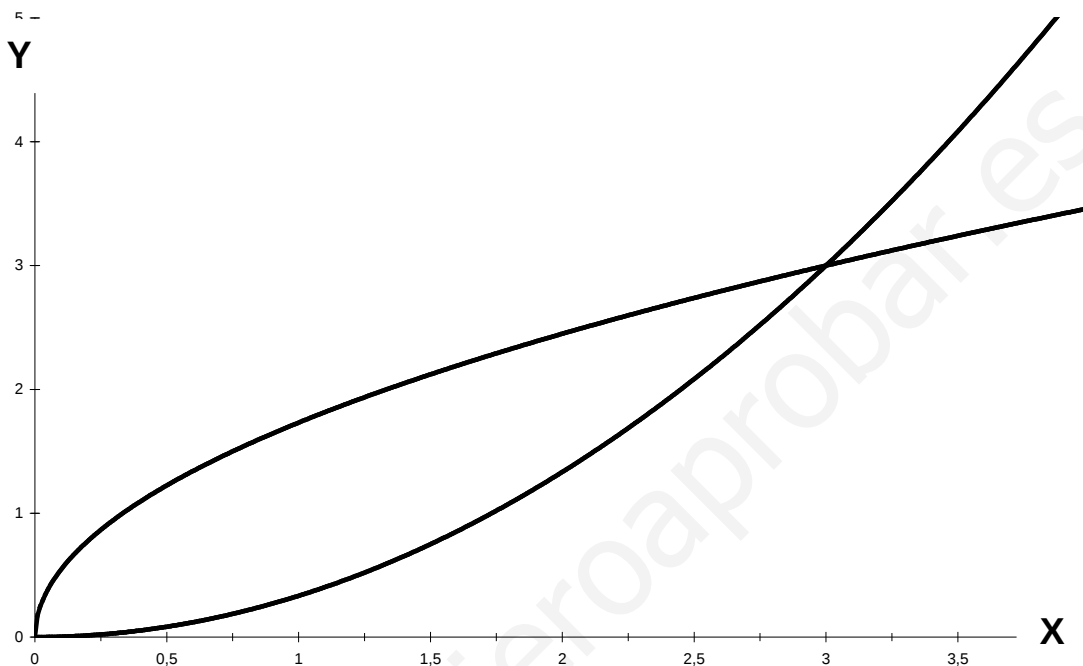
$$\begin{cases} \vec{v}_r = (4, -4, 1) \\ \vec{v}_\pi = (a, 2, -4) \end{cases} \Rightarrow \frac{-4}{2} \neq \frac{1}{-4} \Rightarrow \text{No pueden ser perpendiculares sean cuales sean los valores de } a \text{ y } b$$

CUARTO BLOQUE

A. Dadas las curvas de ecuaciones $y = \sqrt{3x}$; $y = \frac{1}{3}x^2$:

- Dibuja sus gráficas.
- Señala el recinto plano comprendido entre ambas.
- Calcula el área de dicho recinto.

a) y b)



c)

$$\text{Puntos de corte entre funciones} \Rightarrow \sqrt{3x} = \frac{1}{3}x^2 \Rightarrow 3x = \frac{1}{9}x^4 \Rightarrow 27x = x^4 \Rightarrow x^4 - 27x = 0$$

$$(x^3 - 27)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 - 27 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{27} = 3 \end{cases}$$

$$A = \int_0^3 \sqrt{3x} \, dx - \int_0^3 \frac{x^2}{3} \, dx = \sqrt{3} \int_0^3 x^{\frac{1}{2}} \, dx - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot [x^3]_0^3 = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot \left[x^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 - \frac{1}{9} \cdot (3^3 - 0^3)$$

$$A = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \left(3^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}} \right) - \frac{27}{9} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} - \frac{27}{9} = \frac{18}{3} - 3 = 3 \, u^2$$

c) Calcula el área de dicho recinto.

3. Dados los planos de ecuaciones $\pi \equiv x + 2y - z + 4 = 0$; $\pi' \equiv 2x + y + Cz - 3 = 0$:

¿Para qué valores de C el ángulo formado por π y π' es de 60° ?

Forman el mismo ángulo que sus vectores directores. El coseno del ángulo que forman es igual al producto escalar de esos vectores partido entre el producto de sus módulos

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_{\pi'}|}{|\vec{v}_\pi| \cdot |\vec{v}_{\pi'}|} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_\pi = (1, 2, -1) \\ \vec{v}_{\pi'} = (2, 1, C) \end{cases} \Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{|(1, 2, -1) \cdot (2, 1, C)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + C^2}}$$

$$\frac{1}{2} = \pm \frac{2 + 2 - C}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{5 + C^2}} \Rightarrow \sqrt{6} \cdot \sqrt{5 + C^2} = 2 \cdot (4 - C) \Rightarrow 6 \cdot (5 + C^2) = 4 \cdot (4 - C)^2 \Rightarrow$$

$$3 \cdot (5 + C^2) = 2 \cdot (16 - 8C + C^2) \Rightarrow 15 + 3C^2 = 32 - 16C + 2C^2 \Rightarrow C^2 + 16C - 17 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = 16^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-17) = 256 + 68 = 324 \geq 0 \Rightarrow C = \frac{-16 \pm \sqrt{324}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} C = \frac{-16 + 18}{2} = 1 \\ C = \frac{-16 - 18}{2} = -17 \end{cases}$$