**PRIMER BLOQUE**

**A.** De la función *f* de R en R definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, se sabe que tiene un máximo relativo en $x = 1$ y un punto de inflexión en (0, 0), y que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{5}{4}$. Calcula *a*, *b*, *c*, y *d*.

$$\left\{\begin{array}{l} f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \\ f''(x) = 6ax + 2b \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(0) = 0 \Rightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0 \Rightarrow d = 0 \\ f'(1) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0 \\ f''(0) = 0 \Rightarrow 6a \cdot 0 + 2b = 0 \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0 \\ \int_0^1 (ax^3 + cx)\,dx = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot a \cdot (1^4 - 0^4) + c \cdot (1^2 - 0^2) = \frac{5}{4} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 3a + c = 0 \\ \frac{a}{4} + c = \frac{5}{4} \Rightarrow a + 4c = 5 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -12a - 4c = 0 \\ a + 4c = 5 \end{array}\right. \Rightarrow -11a = 5 \Rightarrow a = -\frac{5}{11} \Rightarrow -\frac{15}{11} + c = 0 \Rightarrow$$

$$c = \frac{15}{11} \Rightarrow f(x) = -\frac{5}{11}x^3 + \frac{15}{11}x$$

**B.** Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Determina si *A* y *B* son invertibles.

b) Resuelve la ecuación matricial $BA - A^2 = AB - X$.

a) Para que una matriz tenga inversa es condición que su determinante no sea nulo

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 - 1 = -3 \neq 0 \Rightarrow Existe\ A^{-1} \qquad |B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow No\ existe\ B^{-1}$$

*b)*

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

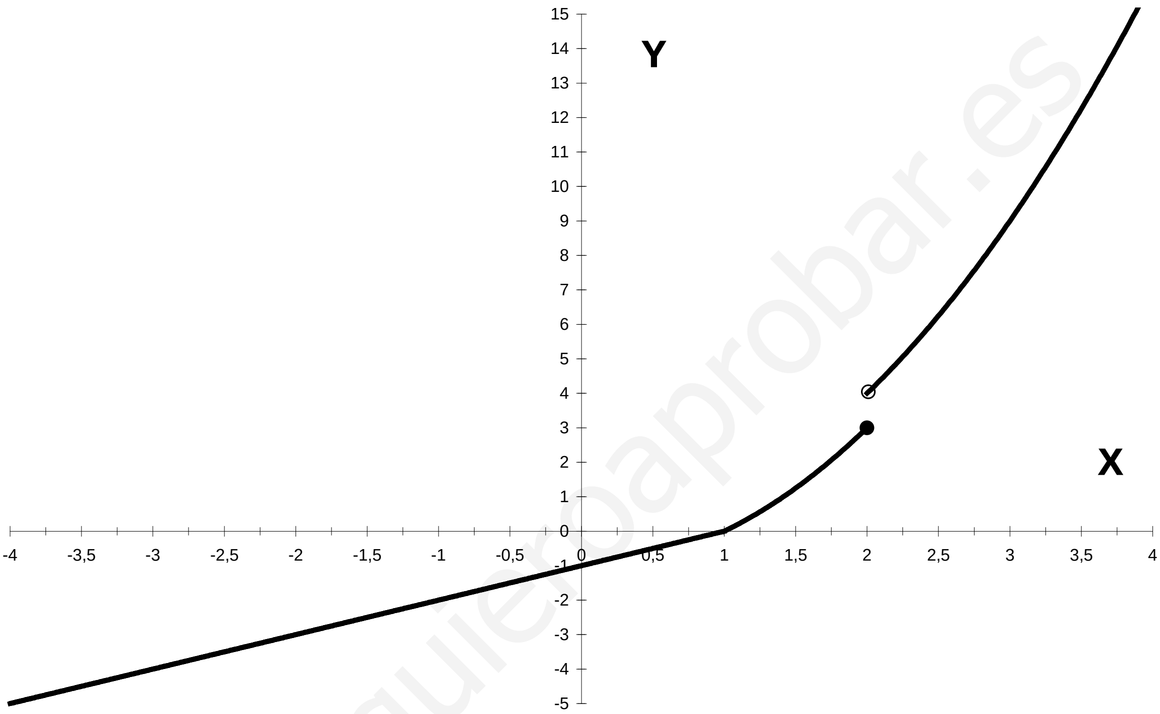
$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**SEGUNDO BLOQUE**

**A.** Dada la función $f$ de R en R definida por: $f(x)=\begin{cases} x-1 & si \quad x\le 1 \\ x^2-1 & si \quad 1<x\le 2 \\ x^2 & si \quad x>2 \end{cases}$ :

a) Representa gráficamente la función.
b) Estudia su continuidad en los puntos de abscisa $x = 1$ y $x = 2$.

a)




*b)*

$$\begin{cases} f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(1)=1-1=0 \\ \lim_{x\to 1^+} f(1)=1^2-1=0 \end{cases} \Rightarrow f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(1)=\lim_{x\to 1^+} f(1)=0 \Rightarrow Es\ continua\ en\ x=1$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to 2^-} f(2)=2^2-1=3 \\ f(2)=\lim_{x\to 2^+} f(2)=2^2=4 \end{cases} \Rightarrow 3=\lim_{x\to 2^-} f(2)\neq f(2)=\lim_{x\to 2^+} f(2)=4 \Rightarrow No\ continua\ en\ x=2$$

**B.** Determina la ecuación del plano que pasa por el punto $A$ (1, 1, 2) y es paralelo a las rectas $r$ y $s$ dadas por $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$ $\quad s \equiv \begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ -x + y + 3z = 1 \end{cases}$

¿Pertenece el punto $P$(2, 1, 4) a ese plano?.

a) Para determinar la ecuación del plano $\pi$ tenemos los dos vectores directores de la recta al ser paralelos a ellos y un tercer vector formado por el punto A y el punto G generador del plano. Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) siendo el último combinación lineal de los otros dos y, por ello, el determinante de la matriz que forman es nulo y la ecuación del plano pedida

$$x + 4z = -1 \Rightarrow x = -1 - 4z \Rightarrow -(-1-4z) + y + 3z = 1 \Rightarrow y + 1 + 7z = 1 \Rightarrow y = -7z \Rightarrow$$

$$s \equiv \begin{cases} x = -1 - 4\lambda \\ y = -7\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v_r = (-1, 1, 2) \\ v_s = (-4, -7, 1) \\ \overrightarrow{AG} = (x, y, z) - (1, 1, 2) = (x-1, y-1, z-2) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -4 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(x-1) - 8(y-1) + 7(z-2) + 4(z-2) + 14(x-1) + (y-1) = 0 \Rightarrow$$

$$15(x-1) - 7(y-1) + 11(z-2) = 0 \Rightarrow 15x - 7y + 11z - 30 = 0$$

$$\text{Veamos si } P \text{ pertenece al plano} \Rightarrow 15 \cdot 2 - 7 \cdot 1 + 11 \cdot 4 - 30 = 0 \Rightarrow 30 - 7 + 44 - 30 \neq 0 \Rightarrow$$

$$37 \neq 0 \Rightarrow P \text{ no pertenece al plano}$$

**TERCER BLOQUE**

**A.** Resuelve la siguiente integral: $\int \frac{x^2+1}{x^3 - 3x + 2} dx$.

$$x^3 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \text{Por Ruffini} \Rightarrow \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \underline{|0} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 1 & 1 & -2 \\ 1 & & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & \underline{|0} \end{array}$$

$$(x-1)^2(x+2) = 0 \Rightarrow \frac{x^2+1}{x^3-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2 = x^2 + 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow B \cdot 3 = 1^2 + 1 = 2 \Rightarrow B = \frac{2}{3} \\ x = -2 \Rightarrow C \cdot 9 = (-2)^2 + 1 = 5 \Rightarrow C = \frac{5}{9} \\ x = 0 \Rightarrow -2A + 2B + C = 0^2 + 1 = 1 \end{cases}$$

**Continuación del Problema A del Tercer Bloque**

$$\begin{cases} B=\frac{2}{3} \\ C=\frac{5}{9} \\ -2A+2B+C=1 \Rightarrow -2A+\frac{4}{3}+\frac{5}{9}=1 \Rightarrow -2A=1-\frac{4}{3}-\frac{5}{9}=\frac{9-12-5}{9}=-\frac{8}{9} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{x^2+1}{x^3-3x+2}=\frac{-\frac{8}{9}}{x-1}+\frac{\frac{2}{3}}{(x-1)^2}+\frac{\frac{5}{9}}{x+2}$$

$$I=\int\frac{x^2+1}{x^3-3x+2}dx=-\frac{8}{9}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{5}{9}\int\frac{dx}{x+2}=-\frac{8}{9}\int\frac{dt}{t}+\frac{2}{3}\int\frac{dt}{t^2}+\frac{5}{9}\int\frac{du}{u}$$

$$\begin{cases} x-1=t \Rightarrow dx=dt \\ x+2=u \Rightarrow dx=du \end{cases}$$

$$I=-\frac{8}{9}\ln t+\frac{2}{3}\int t^{-2}dt+\frac{5}{9}\ln u=\frac{1}{9}\ln\frac{u^5}{t^8}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(-1)}t^{-1}=\frac{1}{9}\ln\frac{(x+2)^5}{(x-1)^8}-\frac{2}{3(x-1)}$$

$$I=\ln\sqrt[9]{\frac{(x+2)^5}{(x-1)^8}}-\frac{2}{3(x-1)}+K$$

**B.** Estudia, según los valores de $K$, la compatibilidad del sistema: $\begin{cases} x+y+z = 0 \\ x+2y+3z = k \\ 2x+3y+4z = k \end{cases}$.

Resuélvelo para $k$ = 1.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}=8+6+3-4-9-4=0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & k \\ 2 & 3 & 4 & k \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & k \\ 0 & 1 & 2 & k \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$Para\ todo\ k \in \Re \Rightarrow rang(A)=rang(A/B)=2 < Número\ de\ incognitas$

$Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$

$y+2z=k \Rightarrow y=k-2z \Rightarrow x+k-2z+z=0 \Rightarrow x=-k+z \Rightarrow$

$Solución \Rightarrow (x\ ,y\ ,z)=(-k+\lambda\ ,k-2\lambda\ ,\lambda)$

$Cuando\ k=1 \Rightarrow (x\ ,y\ ,z)=(-1+\lambda\ ,1-2\lambda\ ,\lambda)$

**CUARTO BLOQUE**

**A.** Supongamos que el rendimiento $r(t)$ de una alumna en un examen que dura dos horas viene dado por la relación $r(t) = 75\,t\,(2 - t)$ donde $t$, con $0 \le t \le 2$, es el tiempo en horas.

a) ¿En qué intervalos aumenta el rendimiento y en qué intervalos disminuye?

b) ¿En qué momento se obtiene mayor rendimiento?

c) ¿En qué momento el rendimiento es nulo?

*a )*

$$r'(t) = 75 \cdot (2 - 2t) = 150 \cdot (1 - t) \Rightarrow r'(t) > 0 \Rightarrow 150 \cdot (1 - t) > 0 \Rightarrow \begin{cases} 150 > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ 1 - t > 0 \Rightarrow -t > -1 \Rightarrow t < 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} Creciente \Rightarrow \forall x \in \Re \,/\, 0 < x < 1 \\ Decreciente \Rightarrow \forall x \in \Re \,/\, 1 < x < 2 \end{cases}$$

*b )*

$$Es\ máximo\ en\ x = 1 \Rightarrow r(1) = 75 \cdot 1 \cdot (2 - 1) = 75\ De\ crecimiento\ pasa\ a\ decrecimiento$$

*c )*

$$r(t) = 75 \cdot \left(2t - t^2\right) \Rightarrow r(t) = 0 \Rightarrow 75 \cdot \left(2t - t^2\right) = 0 \Rightarrow 2t - t^2 = 0 \Rightarrow (2 - t)\,t = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0\ horas \\ t = 2\ horas \end{cases}$$

**B.** Considera el plano $\pi$ y la recta $r$ de ecuaciones $\pi \equiv x + y = 2$ ; $r \equiv \begin{cases} x + z = 4 \\ y = 0 \end{cases}$ .

a) Halla el punto de intersección de $\pi$ y $r$.

b) Halla la ecuación del plano que contiene a $r$ y es perpendicular a $\pi$.

*a )*

$$x = 4 - z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow Punto\ P\ de\ corte \Rightarrow 4 - \lambda + 0 = 2 \Rightarrow -\lambda = -2 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow$$

$$P \begin{cases} x = 4 - 2 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow P(2\,,0\,,2)$$

**Continuación del Problema B del Cuarto Bloque**

b) Para determinar el plano $\alpha$ contamos con el vector director de la recta **r**, el vector director del plano $\pi$ porque es perpendicular a él y el vector formado por un punto **R** cualquiera de la recta (tomaremos el indicado en la ecuación) y el punto **G** generador del plano.

Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector **RG** es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano.

$$R(4\ ,0\ ,0)$$

$$P\begin{cases} \overrightarrow{v_r} \equiv (-1\ ,0\ ,1) \\ \overrightarrow{v_\pi} \equiv (1\ ,1\ ,0) \\ \overrightarrow{RG} \equiv (x\ ,y\ ,z)-(4\ ,0\ ,0)=(x-4\ ,y\ ,z) \end{cases} \Rightarrow \alpha \equiv \begin{vmatrix} x-4 & y & z \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$y-z-(x-4)=0 \Rightarrow \alpha \equiv x-y+z-4=0$$