

PRIMER BLOQUE

A. a) Enuncia la regla de L'Hôpital.

b) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$.

a)

Sean **f(x)** y **g(x)** funciones continuas en **[a, b]**, derivables en **(a, b)**, que cumplen

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ siendo $x_0 \in (a, b)$ y tales que $g'(x) \neq 0$ para todo valor de x en el intervalo

(a, b). Entonces, si **f(x₀) = g(x₀) = 0** y existe el $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, se tiene que también existe el límite

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ y, además, estos límites son iguales: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1} &= \frac{e^{0^2} - 1}{\cos 0 - 1} = \frac{e^0 - 1}{1 - 1} = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^{x^2}}{-\sin x} = \frac{2 \cdot 0 \cdot e^{0^2}}{-\sin 0} = \frac{0 \cdot 1}{0} = \frac{0}{0} = \\ &= \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(e^{x^2} + 2xe^{x^2}x)}{-\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(e^{x^2} + 2x^2e^{x^2})}{-\cos x} = \frac{2(e^{0^2} + 2 \cdot 0^2 e^{0^2})}{-\cos 0} = \frac{2(1 + 0 \cdot 1)}{-1} = -2 \end{aligned}$$

B. Calcula las dimensiones de 3 campos cuadrados de modo que: el perímetro del mayor sea el doble del perímetro del menor, se necesiten exactamente 1120 metros de valla para vallar los tres campos y las sumas de sus áreas sea la mínima posible. Cada campo tiene su propia valla.

Sea **a** el valor del lado menor, siendo su perímetro **4a**, el que es mayor tendrá un perímetro **8a** y el tercero, de lado **b**, **4b** de perímetro

$$\begin{cases} 4a + 8a + 4b = 1120 \Rightarrow 12a + 4b = 1120 \Rightarrow 3a + b = 280 \Rightarrow b = 280 - 3a \\ A = a^2 + (2a)^2 + b^2 = a^2 + 4a^2 + b^2 = 5a^2 + b^2 \end{cases} \Rightarrow A = 5a^2 + (280 - 3a)^2 \Rightarrow$$

$$A' = \frac{dA}{da} = 10a + 2 \cdot (-3)(280 - 3a) = 2(5a - 840 + 9a) = 2(14a - 840) = 28(a - 60) \Rightarrow$$

$$\text{Si } A' = 0 \Rightarrow 28(a - 60) = 0 \Rightarrow a - 60 = 0 \Rightarrow a = 60 \Rightarrow A' = \frac{dA}{da} = 28 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = 60 \text{ m} \\ 2a = 120 \text{ m} \\ b = 280 - 3 \cdot 60 = 100 \text{ m.} \end{cases}$$

SEGUNDO BLOQUE

A. Determina un polinomio $P(x)$ de segundo grado sabiendo que: $P(0) = P(2) = 1$ y que

$$\int_0^2 P(x) dx = \frac{1}{3}.$$

$$P(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow \begin{cases} P(0) = 1 \Rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 1 \Rightarrow c = 1 \\ P(2) = 1 \Rightarrow a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 1 = 1 \Rightarrow 4a + 2b = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \\ \int_0^2 (ax^2 + bx + 1) dx = \frac{1}{3} \Rightarrow a \cdot \frac{1}{3} \cdot [x^3]_0^2 + b \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_0^2 + [x]_0^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{8a}{3} + 2b + 2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \Rightarrow -8a - 4b = 0 \\ \frac{8a + 6b + 6}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow 8a + 6b = -5 \Rightarrow 2b = -5 \Rightarrow b = -\frac{5}{2} \Rightarrow 2a - \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow 2a = \frac{5}{2} \Rightarrow a = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$P(x) = \frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + 1$$

B. Dada la función $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$, estudia:

- Asíntotas.
- Máximos y mínimos.
- Intervalos de concavidad y convexidad.
- Haz un dibujo aproximado de la gráfica aprovechando los apartados anteriores.

a)

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{0^2 + 1}{0} = \frac{1}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \Rightarrow \text{Asíntota vertical en } x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = \infty \end{cases}$$

Asíntotas horizontales

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1}} = \infty \Rightarrow \nexists \text{ asíntota horizontal cuando } x \rightarrow \infty$$

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-x)^2 + 1}{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{-x} = \frac{\infty}{-\infty} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-1}} = -\infty \Rightarrow$$

(No existe) $\nexists$ asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$

Asíntotas oblicuas

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 + 1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2x}} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2}} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow \exists \text{ asíntota oblicua } y = x \text{ cuando } x \rightarrow \infty$$

Continuación

a) Continuación

Asíntotas oblicuas (Continuación)

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-x)^2 + 1}{(-x)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{2x} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{2} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0 \Rightarrow \exists \text{ asíntota oblicua } y = x \text{ cuando } x \rightarrow -\infty$$

b)

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2 + 1)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{2x \cdot x^2 - 2x(x^2 - 1)}{x^4} = \frac{2x^2 - 2x^2 + 2}{x^3} = \frac{2}{x^3} \Rightarrow \begin{cases} f''(-1) = \frac{2}{(-1)^3} = -2 < 0 \Rightarrow \text{Máximo} \\ f''(1) = \frac{2}{1^3} = 2 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{Máximo relativo en } x = -1 \Rightarrow f(-1) = \frac{(-1)^2 + 1}{(-1)} = \frac{2}{(-1)^3} = -2$$

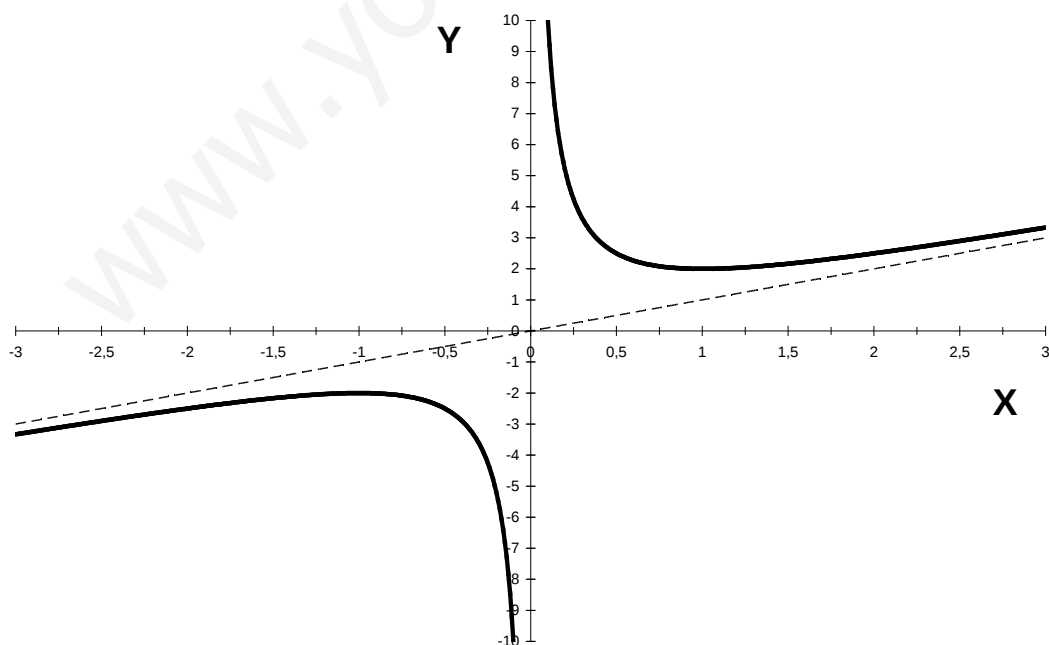
$$\text{Mínimo relativo en } x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1^2 + 1}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

c)

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow \text{Concavidad} \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow \frac{2}{x^3} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ x^3 > 0 \Rightarrow x > 0 \end{cases}$$

Concavidad $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / x > 0$ Convexidad $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / x < 0$

d)



TERCER BLOQUE

A. Resuelve la ecuación matricial $\mathbf{AX} - \mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{0}$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} - \mathbf{C} \Rightarrow A^{-1}\mathbf{AX} = A^{-1}(\mathbf{B} - \mathbf{C}) \Rightarrow \mathbf{IX} = A^{-1}(\mathbf{B} - \mathbf{C}) \Rightarrow \mathbf{X} = A^{-1}(\mathbf{B} - \mathbf{C})$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{adj } A^t) \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj } A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \\ B - C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 0 \\ -11 & -1 & 14 & -2 \end{pmatrix}$$

B. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

- Determina los valores de c tales que la matriz $\mathbf{A} + c\mathbf{B}$ no tenga rango 2.
- Calcula, para los valores hallados de c , la matriz $\mathbf{A}(\mathbf{A} + c\mathbf{B})$ y su rango.

a)

$$\mathbf{A} + c\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 4c & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+1 & -1 \\ 4c+4 & 2-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+1 & -1 \\ 4 \cdot [c+1] & 2-c \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c+1 & -1 \\ 0 & 2-c+4 \end{pmatrix} \Rightarrow 6-c=0 \Rightarrow$$

$$c = 6$$

$$\text{Cuando } c = 6 \Rightarrow \text{rang}(\mathbf{A} + c\mathbf{B}) = 1$$

b)

$$\mathbf{A}(\mathbf{A} + 6\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6+1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 28 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 28 & -4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}[\mathbf{A}(\mathbf{A} + c\mathbf{B})] = 1$$

CUARTO BLOQUE

A. Dada la recta $r \equiv \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$

- Determina la ecuación de la recta s que pasa por el punto $P(2, -1, 0)$ y corta perpendicularmente a r .
- Calcula el punto Q intersección de r y s .
- Calcula el simétrico de P respecto a r .

a) El vector formado por el punto P y por el punto R general de la recta r , que será el vector director de la recta s , es perpendicular al vector director de esta y por lo tanto su producto escalar es nulo

$$x = 1 + y \Rightarrow 3 \cdot (1 + y) - y + z = 0 \Rightarrow z = y - 3y - 3 \Rightarrow z = -3 - 2y \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -3 - 2\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (1, 1, -2) \\ \vec{v}_s = \overrightarrow{PR} = (1 + \lambda, \lambda, -3 - 2\lambda) - (2, -1, 0) = (\lambda - 1, \lambda + 1, -3 - 2\lambda) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r \perp \overrightarrow{PR} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \overrightarrow{PR} = 0 \Rightarrow$$

$$(1, 1, -2) \cdot (\lambda - 1, \lambda + 1, -3 - 2\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda - 1 + \lambda + 1 + 6 + 4\lambda = 0 \Rightarrow 6 + 6\lambda = 0 \Rightarrow 6\lambda = -6 \Rightarrow$$

$$\lambda = -\frac{6}{6} = -1 \Rightarrow \vec{v}_s = (-1 - 1, -1 + 1, -3 - 2(-1)) = (-2, 0, -3 + 2) = (-2, 0, -1) \equiv (2, 0, 1) \Rightarrow$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\mu \\ y = -1 \\ z = \mu \end{cases}$$

b)

$$Q \begin{cases} x = 1 + (-1) \\ y = (-1) \\ z = -3 - 2 \cdot (-1) \end{cases} \Rightarrow Q(0, -1, -1)$$

c) Para hallar el punto simétrico de P , después de conocer el valor de Q , que es el punto medio entre P y P' utilizaremos la fórmula que determina el valor de ese punto medio

$$\begin{cases} 0 = \frac{2 + x_{P'}}{2} \Rightarrow x_{P'} = 2 \cdot 0 - 2 = -2 \\ -1 = \frac{-1 + y_{P'}}{2} \Rightarrow y_{P'} = 2 \cdot (-1) + 1 = -1 \Rightarrow P'(-2, -1, -2) \\ -1 = \frac{0 + y_{P'}}{2} \Rightarrow y_{P'} = 2 \cdot (-1) - 0 = -2 \end{cases}$$

B. Considera los cuatro puntos **A(1, 0, 1)**, **B(1, 1, 0)**, **C(0, 1, 1)** y **D(1, k, k-1)**.

- Halla **k** para que los cuatro puntos sean coplanarios (estén en el mismo plano).
- ¿Qué valores de **k** hacen que el volumen del tetraedro determinado por los cuatro puntos sea **30** unidades de volumen?

a) Al tener que ser coplanarios los vectores **AB**, **AC** y **AD** es condición que determina que uno de ellos es combinación lineal de los otros dos y por ello, el determinante de la matriz que forman es nulo

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1, 1, 0) - (1, 0, 1) = (0, 1, -1) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 1, 1) - (1, 0, 1) = (-1, 1, 0) \\ \overrightarrow{AD} = (1, k, k-1) - (1, 0, 1) = (0, k, k-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & k & k-2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k + k - 2 = 0 \Rightarrow 2k - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$2k = 2 \Rightarrow k = \frac{2}{2} = 1$$

b) El volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto (producto escalar por vectorial) de los vectores **AB**, **AC** y **AD**

$$V = \frac{1}{6} \cdot |\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD})|$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1, 1, 0) - (1, 0, 1) = (0, 1, -1) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 1, 1) - (1, 0, 1) = (-1, 1, 0) \\ \overrightarrow{AD} = (1, k, k-1) - (1, 0, 1) = (0, k, k-2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 0 & k & k-2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = k + k - 2 = 2k - 2 \Rightarrow$$

$$30 = \frac{1}{6} \cdot (2k - 2) \Rightarrow 2k - 2 = 180 \Rightarrow 2k = 182 \Rightarrow k = \frac{182}{2} = 91$$