

PRIMER BLOQUE

A. a) Estudia la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = \begin{cases} 5x + b & \text{si } x < 1 \\ ax^2 + 3x + 5 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

b) Determina los valores de **a** y **b** para que sea continua y derivable en todo número real.

Continuidad

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 5 \cdot 1 + b = 5 + b \\ f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 5 = a + 8 \end{cases} \Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow 5 + b = a + 8 \Rightarrow a - b = -3$$

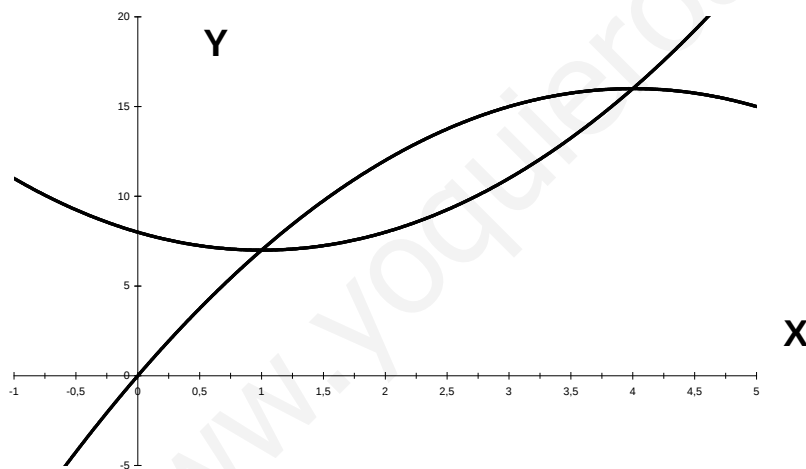
$$f'(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x < 1 \\ 2ax + 3 & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 2a \cdot 1 + 3 = 2a + 3 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) \Rightarrow 2a + 3 = 5$$

$$\begin{cases} a - b = -3 \\ 2a = 2 \Rightarrow a = 1 \end{cases} \Rightarrow 1 - b = -3 \Rightarrow b = 4$$

B. Considera las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 8$; $g(x) = -x^2 + 8x$.

- a) Dibuja sus gráficas utilizando los mismos ejes.
b) Halla el área de la región encerrada por ellas.

a)



b)

Puntos de corte de las funciones $\Rightarrow x^2 - 2x + 8 = -x^2 + 8x \Rightarrow 2x^2 - 10x + 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5+3}{2} = 4 \\ x = \frac{5-3}{2} = 1 \end{cases}$$

$$A = \int_1^4 (-x^2 + 8x) dx - \int_1^4 (x^2 - 2x + 8) dx = \int_1^4 (-2x^2 + 10x - 8) dx = -2 \cdot \frac{1}{3} \cdot [x^3]_1^4 + 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_1^4 - 8 \cdot [x]_1^4$$

$$A = -\frac{2}{3} \cdot (4^3 - 1^3) + 5 \cdot (4^2 - 1^2) - 8 \cdot (4 - 1) = -\frac{2}{3} \cdot 63 + 5 \cdot 15 - 8 \cdot 3 = -42 + 75 - 24 = 9 \text{ u}^2$$

SEGUNDO BLOQUE

A. En un concurso se da a cada participante un alambre de dos metros de longitud para que, doblándolo convenientemente, haga con el mismo un cuadrilátero con los cuatro ángulos rectos. Aquellos que lo logren reciben como premio tantos euros como decímetros cuadrados tenga de superficie el cuadrilátero construido.
Calcula la cuantía del máximo premio que se puede obtener en ese concurso.

Siendo **a** y **b** los lados de un cuadrilátero, el de mayor premio es el que tenga mayor superficie

$$\begin{cases} 2 = 2a + 2b \Rightarrow 1 = a + b \Rightarrow b = 1 - a \\ S = ab \end{cases} \Rightarrow S = a(1 - a) \Rightarrow S' = \frac{dS}{da} = 1 - a - a = 1 - 2a \Rightarrow S' = 0 \Rightarrow 1 - 2a = 0 \Rightarrow$$

$$2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow S'' = \frac{d^2S}{da^2} = -2 \Rightarrow \text{Máximo} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \text{ m.} \\ b = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ m.} \end{cases}$$

B. Considera la función $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + 6x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

- a) ¿Cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo **[0, 3]**?
b) ¿Hay algún punto de la gráfica en el que la recta tangente sea paralela a la recta que pasa por los puntos **(0, f(0))**, **(3, f(3))**?

a)

Teorema del valor medio

Si **f(x)** es continua en **[a, b]** y derivable en **(a, b)**, entonces existe, al menos, un punto **c** $\in$ **(a, b)** tal que:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

La condición necesaria es que sea continua y derivable

Continuidad

Para ser continua en todo $x \in \mathbb{R}$ debe serlo en **x = 2**

$$\begin{cases} f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2^3 = 8 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -2^2 + 6 \cdot 2 = -4 + 12 = 8 \end{cases} \Rightarrow f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 8 \Rightarrow \text{Es continua en } x = 2$$

Derivable

Para ser derivable en todo $x \in \mathbb{R}$ debe serlo en **x = 2**

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x < 2 \\ -2x + 6 & \text{si } x > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = 3 \cdot 2^2 = 12 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = -2 \cdot 2 + 6 = -4 + 6 = 2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = 12 \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = 2 \Rightarrow$$

No es derivable en $x = 2$ por lo tanto no cumple la hipótesis del teorema del valor medio

b)

$$\begin{cases} f(0) = 0^3 = 0 \\ f(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 = -9 + 18 = 9 \end{cases} \Rightarrow m = \frac{9 - 0}{3 - 0} = 3 \Rightarrow$$

$$3 = 3x^2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \in (-\infty, 2) \\ x = -1 \notin (-\infty, 2) \end{cases} \Rightarrow \text{Sin solución} \Rightarrow (1, 1^3) \Rightarrow \text{Punto}(1, 1)$$

$$3 = -2x + 6 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \notin (2, \infty) \Rightarrow \text{Sin solución}$$

TERCER BLOQUE

A. a) Estudia, según los valores del parámetro **a**, el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 2y - z = -1 \\ ax - y + 2z = 2 \\ x + 2y + az = 3 \end{cases}$$

b) Resuelve el sistema para **a = 3**.

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ a & -1 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = -a - 4 - 2a - 1 - 4 + 2a^2 = 2a^2 - 3a - 9 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow 2a^2 - 3a - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-9) = 9 + 72 = 81 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3+9}{4} = 3 \\ x = \frac{3-9}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$(\text{Para todo}) \forall x \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{3}{2}, 3 \right\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow$$

Sistema Compatible Determinado

$$\text{Si } a = -\frac{3}{2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -\frac{3}{2} & 3 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & -3 & 6 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & -1 & 8 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array} \right) \Rightarrow 0z = 9 \Rightarrow z = \frac{9}{0}$$

Sin solución $\Rightarrow$ Sistema Incompatible

$$\text{Si } a = 3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{La tercera ecuación es}$$

combinación lineal de las otras dos $\Rightarrow \text{rang}(A) = 2 < \text{Número de incógnitas} \Rightarrow$

Sistema Compatible Indeterminado

b)

Si $a = 3 \Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow y + z = 1 \Rightarrow y = 1 - z \Rightarrow x - 2 + 2z - z = -1 \Rightarrow x + 3z = 1 \Rightarrow x = 1 - 3z$$

$$\text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = (1 - 3\lambda, 1 - \lambda, \lambda)$$

B. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula, si es posible, una matriz X de números enteros tal que

$$XA = (10 \ 6 \ 2)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 8 + 4 = 0 \Rightarrow \text{No existe } A^{-1} \Rightarrow \text{Siendo } X = (x \ y \ z)$$

$$(x \ y \ z) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (10 \ 6 \ 2) \Rightarrow (4x - 2y \ 2x + z \ 2y + z) = (10 \ 6 \ 2) \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 10 \\ 2x + z = 6 \\ 2y + z = 2 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -8 + 4 = -4 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & | & 10 \\ 2 & 0 & 1 & | & 6 \\ 0 & 2 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & | & 10 \\ -4 & 0 & -2 & | & -12 \\ 0 & 2 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & | & 10 \\ 0 & -2 & -2 & | & -2 \\ 0 & 2 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & | & 10 \\ 0 & -2 & -2 & | & -2 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -z = 0 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow -2y + 2 \cdot 0 = -2 \Rightarrow -2y = -2 \Rightarrow y = \frac{-2}{-2} = 1 \Rightarrow 4x - 2 \cdot 1 = 10 \Rightarrow$$

$$4x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{4} = 3 \Rightarrow X = (3 \ 1 \ 0)$$

CUARTO BLOQUE

A. Se consideran las rectas $r \equiv \begin{cases} x - ay = 1 \\ y - z = 1 \end{cases}$ $s \equiv \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ x + y + z = 8 \end{cases}$

Prueba que, para ningún valor de a , r y s , pueden ser paralelas, y averigua el único valor de a para el que se cortan.

Dos rectas son paralelas cuando sus vectores directores son iguales o proporcionales

$$s \equiv 2x - y = 8 \Rightarrow y = -8 + 2x \Rightarrow x - 8 + 2x + z = 8 \Rightarrow z = 16 - 3x$$

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = 1 + a\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = -8 + 2\mu \\ z = 16 - 3\mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (a, 1, -1) \\ \vec{v}_s = (1, 2, -3) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} \neq \frac{-1}{-3} \Rightarrow \text{No pueden ser paralelos sea el valor de } a \text{ que sea}$$

Continuación del Problema A del Cuarto Bloque*Punto de corte*

$$\begin{cases} 1 + a\lambda = \mu \\ \lambda = -8 + 2\mu \\ -1 + \lambda = 16 - 3\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\lambda - \mu = -1 \\ \lambda - 2\mu = -8 \\ \lambda + 3\mu = 17 \end{cases} \Rightarrow \text{El determinante de los coeficientes ampliados debe de ser nulo}$$

para que el Sistema sea Compatible Determinado y exista un punto P de corte

$$|A/B| = \begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -8 \\ 1 & 3 & 17 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -34a + 8 - 3 - 2 + 24a + 17 = 0 \Rightarrow -10a + 20 = 0 \Rightarrow 10a = 20 \Rightarrow a = 2$$

B. Halla la ecuación de la recta que pasa por **A(2, -1, 3)** y es perpendicular al plano que pasa por los puntos **B(1, 1, 0)**, **C(0, -1, 2)** y **D(-2, 2, 1)**. Calcula también el volumen del tetraedro **ABCD**.

Para hallar el vector director de la recta **r** pedida, calcularemos el producto vectorial de los vectores **BC** y **BD** que están contenidos en el plano

$$\begin{cases} \overrightarrow{BC} = (0, -1, 2) - (1, 1, 0) = (-1, -2, 2) \\ \overrightarrow{BD} = (-2, 2, 1) - (1, 1, 0) = (-3, 1, 1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k} - 6\vec{k} - 2\vec{i} + \vec{j}$$

$$\vec{v}_r = -4\vec{i} - 5\vec{j} - 7\vec{k} \Rightarrow \vec{v}_r = (-4, -5, -7) \equiv (4, 5, 7) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 + 4\lambda \\ y = -1 + 5\lambda \\ z = 3 + 7\lambda \end{cases}$$

El volumen del tetraedro **ABCD** es igual a un sexto del módulo del producto mixto (escalar y vectorial) de los vectores **BA**, **BC** y **BD**

$$\begin{cases} \overrightarrow{BA} = (2, -1, 3) - (1, 1, 0) = (1, -2, 3) \\ \overrightarrow{BC} = (-1, -2, 2) \\ \overrightarrow{BD} = (-3, 1, 1) \end{cases} \Rightarrow V = \frac{1}{6} \cdot |\overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD})| \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = |-2 + 12 - 3 - 18 - 2 - 2| = |-27 + 12| = |-15| = 15 \Rightarrow V = \frac{1}{6} \cdot 15 = \frac{5}{2} u^3$$