

PRIMER BLOQUE

A. Determina los valores $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ pase por el origen de coordenadas, tenga un punto de inflexión en $x = -1$, y su recta tangente en $x = 1$ tenga pendiente 3

$$\begin{cases} f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \\ f''(x) = 6x + 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \Rightarrow 0^3 + a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0 \\ f'(1) = 3 \Rightarrow 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + b = 3 \Rightarrow 3 + 2a + b = 3 \Rightarrow 2a + b = 0 \Rightarrow 2 \cdot 3 + b = 0 \\ f''(-1) = 0 \Rightarrow 6 \cdot (-1) + 2a = 0 \Rightarrow -6 + 2a = 0 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3 \end{cases}$$

$$b = -6 \Rightarrow f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x$$

B. Enuncia el teorema de Rolle. En los ejemplos siguientes $f(-2) = f(2)$ pero no hay ningún valor $c \in (-2, 2)$ tal que $f'(c) = 0$. Justifica en cada caso porque no contradicen el teorema de Rolle:

a) $f(x) = \frac{1}{x^4}$, b) $g(x) = 2 - |x|$ (Nota: $|x|$ representa el valor absoluto de x)

Teorema de Rolle

Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y que verifica que $f(a) = f(b)$; entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$

a)

$$x^4 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{1}{0^4} = \frac{1}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \Rightarrow \text{Asíntota vertical en } x = 0$$

No cumple el teorema de Rolle porque la función es **discontinua** en $x = 0 \in [-2, 2]$

b)

$$x > 0 \Rightarrow g(x) = \begin{cases} 2 - (-x) & \text{si } x < 0 \\ 2 - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 2 + 0 = 2 \\ g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 2 - 0 = 2 \end{cases} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$$

Función continua en toda la recta real

$$g'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = -1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) \Rightarrow \text{No es derivable en } x = 0$$

No cumple el teorema de Rolle porque la función es continua en $x = 0 \in [-2, 2]$, pero **no es derivable** en $x = 0 \in (-2, 2)$,

SEGUNDO BLOQUE

A. Calcula la integral indefinida $\int \frac{x+2}{x^2-2x+1} dx$.

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \Rightarrow \frac{x+2}{x^2-2x+1} = \frac{x+2}{(x-1)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x-1)} = \frac{A+B(x-1)}{(x-1)^2} \Rightarrow$$

$$A+B(x-1)=x+2 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow A+B(1-1)=1+2 \Rightarrow A=3 \\ x=0 \Rightarrow A+B(0-1)=0+2 \Rightarrow A-B=2 \Rightarrow 3-B=2 \Rightarrow B=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{x+2}{x^2-2x+1} = \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)}$$

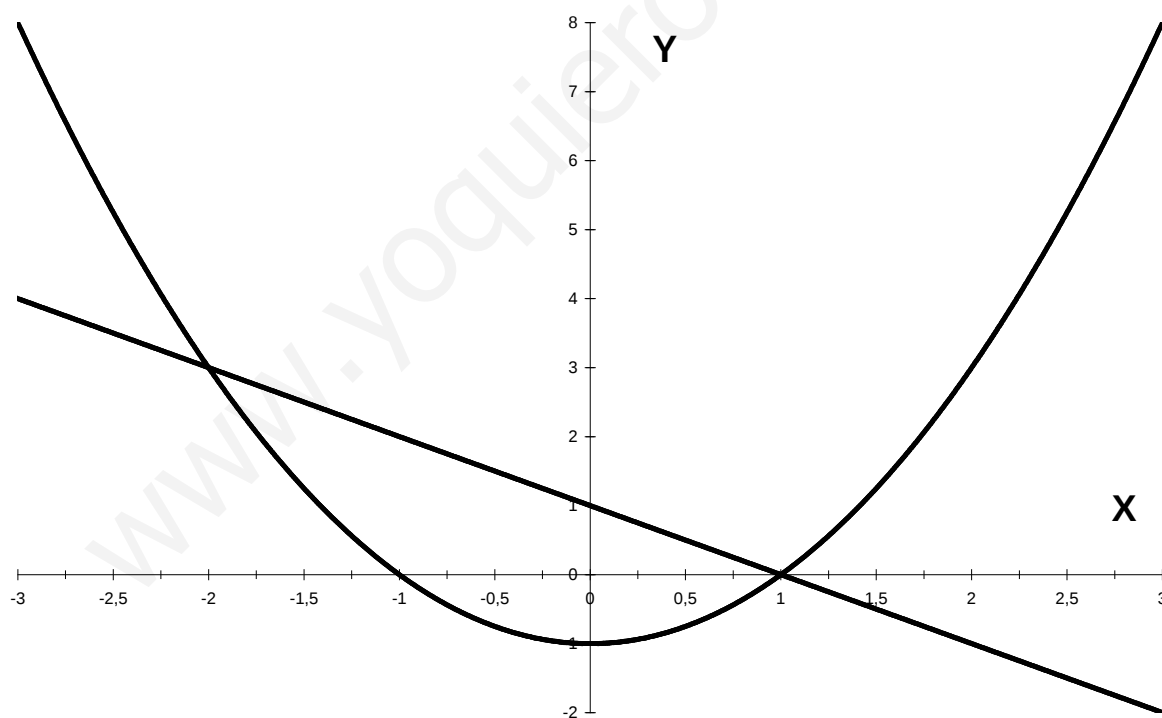
$$I = \int \frac{x+2}{x^2-2x+1} dx = \int \frac{3}{(x-1)^2} dx + \int \frac{1}{(x-1)} dx = 3 \int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dt}{t} = 3 \int t^{-2} dt + \ln t = 3 \cdot \frac{1}{(-1)} t^{-1} + \ln(x-1)$$

$$x-1=t \Rightarrow dx=dt$$

$$I = \int \frac{x+2}{x^2-2x+1} dx = -\frac{3}{t} + \ln(x-1) = -\frac{3}{x-1} + \ln(x-1) + K$$

B. Dada las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 1 - x$: a) Esboza el recinto encerrado entre sus gráficas, b) Calcula el área de dicho recinto

a)



Continuación del Problema B del Segundo Bloque

b)

$$\text{Puntos de corte con OX} \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 = x^2 - 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \\ 0 = 1 - x \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Puntos de corte entre funciones} \Rightarrow x^2 - 1 = 1 - x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 > 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1+3}{2} = 1 \\ x = \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

$$A = \int_{-2}^{-1} (1-x) dx - \int_{-2}^{-1} (x^2-1) dx + \int_{-1}^1 (1-x) dx + \left| \int_{-1}^1 (x^2-1) dx \right| = \int_{-2}^{-1} (2-x-x^2) dx + \int_{-1}^1 (1-x) dx - \int_{-1}^1 (x^2-1) dx$$

$$A = \int_{-2}^{-1} (2-x-x^2) dx + \int_{-1}^1 (2-x-x^2) dx = \int_{-2}^1 (2-x-x^2) dx = 2 \cdot [x]_{-2}^1 - \frac{1}{2} \cdot [x^2]_{-2}^1 - \frac{1}{3} \cdot [x^3]_{-2}^1$$

$$A = 2 \cdot [1 - (-2)] - \frac{1}{2} \cdot [1^2 - (-2)^2] - \frac{1}{3} \cdot [1^3 - (-2)^3] = 2 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot (1-4) - \frac{1}{3} \cdot [1 - (-8)] = 6 + \frac{3}{2} - \frac{9}{3}$$

$$A = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2} u^2$$

TERCER BLOQUE

A. a) Despeja la matriz **X** en función de **A** e **I₂** en la ecuación **(X + A)² = X² + XA + I₂** siendo **X** y **A** matrices cuadradas de orden dos, e **I₂** la matriz identidad de orden dos.

b) Resuelve la ecuación **B · X + B² = I₂** siendo $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e **I₂** la matriz identidad de orden dos

a)

$$X^2 + 2XA + A^2 - X^2 - XA - I_2^2 = 0 \Rightarrow XA + A^2 - I_2 = 0 \Rightarrow XA = I_2 - A^2 \Rightarrow XAA^{-1} = (I_2 - A^2)A^{-1} \Rightarrow XI_2 = I_2A^{-1} - A^2A^{-1} \Rightarrow X = A^{-1} - A$$

b)

$$BX = I_2 - B^2 \Rightarrow B^{-1}BX = B^{-1}(I_2 - B^2) \Rightarrow I_2X = B^{-1}I_2 - B^{-1}B^2 \Rightarrow X = B^{-1} - B$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } B^{-1} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|} (\text{adj } B^t) \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj } B^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$B^{-1} = \frac{1}{(-1)} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

B. A un compañero le piden que clasifique y resuelva el sistema $\begin{cases} 3x - ky = 3 \\ y + 3z = 6 \\ x + kz = 5 \end{cases}$ para el valor del

parámetro $k \in \mathbb{R}$ que el desee. Obtiene, correctamente para dicho valor, que el sistema es compatible indeterminado, y que una expresión de sus soluciones en forma paramétrica es

$\mathbf{x} = \mathbf{1} + 2\mathbf{t}$, $\mathbf{y} = \dots$, $\mathbf{z} = \dots$. Determina para que valor del parámetro k ha clasificado y resuelto el sistema, y calcula las expresiones de las incógnitas “ $\mathbf{y}$ ” y “ $\mathbf{z}$ ” que le faltan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -k & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & k & 5 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -k & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ -3 & 0 & -3k & -15 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -k & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & -k & -3k & -12 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -k & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -12+6k \end{array} \right) \Rightarrow -12+6k=0 \Rightarrow$$

$$6k = 12 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow 3x - 2y = 3 \Rightarrow 3x = 3 + 2y \Rightarrow x = 1 + \frac{2}{3}y \Rightarrow y + 3z = 6 \Rightarrow 3z = 6 - y \Rightarrow z = 2 - \frac{y}{3} \Rightarrow$$

$$\text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = \left(1 + 2\frac{\lambda}{3}, \lambda, 2 - \frac{\lambda}{3} \right) \Rightarrow \text{Siendo } \frac{\lambda}{3} = t \Rightarrow \lambda = 3t \Rightarrow$$

$$\text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = (1 + 2t, 3t, 2 - t)$$

CUARTO BLOQUE

A. El plano α , de ecuación general $\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z} = 10$ corta a las rectas $\mathbf{r}_1: \mathbf{x} = \mathbf{y} = 1$, $\mathbf{r}_2: \mathbf{y} = \mathbf{z} = 2$ y $\mathbf{r}_3: \mathbf{x} = \mathbf{z} = 3$ en los puntos **A**, **B** y **C** respectivamente. Se pide:

- Halla el volumen de tetraedro cuyos vértices son **A**, **B**, **C** y **D(1, 2, 3)**
- Determina la distancia del punto **D** hasta la cara opuesta del tetraedro.

a) El volumen del tetraedro es la sexta parte del módulo del producto mixto (producto escalar por producto vectorial) de los vectores **AB**, **AC** y **AD**

$$\begin{cases} A \Rightarrow 1 + 1 + z = 10 \Rightarrow z = 8 \Rightarrow A(1, 1, 8) \\ B \Rightarrow x + 2 + 2 = 10 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow B(6, 2, 2) \\ C \Rightarrow 3 + y + 3 = 10 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow C(3, 4, 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (6, 2, 2) - (1, 1, 8) = (5, 1, -6) \\ \overrightarrow{AC} = (3, 4, 3) - (1, 1, 8) = (2, 3, -5) \\ \overrightarrow{AD} = (1, 2, 3) - (1, 1, 8) = (0, 1, -5) \end{cases}$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} \right) \right| \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} \right) = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -6 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -75 - 12 + 25 + 10 = -52 \Rightarrow$$

$$\left| \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} \right) \right| = |-52| = 52 \Rightarrow V = \frac{1}{6} \cdot 52 = \frac{26}{3} u^3$$

Continuación del Problema A del Tercer Bloque

b) Es la distancia del punto **d** al plano π que contiene a los puntos **A**, **B** y **C**

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (6, 2, 2) - (1, 1, 8) = (5, 1, -6) \\ \overrightarrow{AC} = (3, 4, 3) - (1, 1, 8) = (2, 3, -5) \\ \overrightarrow{AG} = (x, y, z) - (1, 1, 8) = (x-1, y-1, z-8) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-8 \\ 5 & 1 & -6 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi = \alpha$$

$$-5 \cdot (x-1) - 12 \cdot (y-1) + 15 \cdot (z-8) - 2 \cdot (z-8) + 18 \cdot (x-1) + 25 \cdot (y-1) = 0 \Rightarrow$$

$$13 \cdot (x-1) + 13 \cdot (y-1) + 13 \cdot (z-8) = 0 \Rightarrow (x-1) + (y-1) + (z-8) = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + y + z - 10 = 0 \Rightarrow$$

Es el plano dado en el enunciado (comprobación)

$$d(D, \pi) = \frac{|1 + 2 + 3 - 10|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} u$$

B. a) Halla el punto de la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 \end{cases}$ equidistante de los puntos **P(-1, 2, 1)** y

Q(0, 3, 1)

b) Calcula la ecuación implícita de un plano π de modo que el simétrico del punto **P** respecto del plano π sea el punto **Q**

a) Sea **R** el punto genérico de la recta y el buscado

$$d(P, R) = d(Q, R) \Rightarrow \sqrt{[1 + 2t - (-1)]^2 + (-t - 2)^2 + (-1 - 1)^2} = \pm \sqrt{(1 + 2t - 0)^2 + (-t - 3)^2 + (-1 - 1)^2} \Rightarrow$$

$$\sqrt{(2 + 2t)^2 + (t + 2)^2 + (-2)^2} = \pm \sqrt{(1 + 2t)^2 + (t + 3)^2 + (-2)^2} \Rightarrow$$

$$4 + 8t + 4t^2 + t^2 + 4t + 4 + 4 = 1 + 4t + 4t^2 + t^2 + 6t + 9 + 4 \Rightarrow 5t^2 + 12t + 12 = 5t^2 + 10t + 14 \Rightarrow 2t - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$2t = 2 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow R \begin{cases} x = 1 + 2 \cdot 1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow R(3, -1, -1)$$

b) El plano tendrá como vector director el vector **PQ** que es perpendicular al vector formado por el punto **M** medio de **P** y **Q** y el punto **G** genérico del plano π y su producto escalar es nulo y la ecuación pedida

$$M \begin{cases} x = \frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2} \\ z = \frac{1+1}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (0, 3, 1) - (-1, 2, 1) = (1, 1, 0) \\ \overrightarrow{MG} = (x, y, z) - \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 1\right) = \left(x + \frac{1}{2}, y - \frac{5}{2}, z - 1\right) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{MG} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{MG} = 0$$

$$(1, 1, 0) \cdot \left(x + \frac{1}{2}, y - \frac{5}{2}, z - 1\right) = 0 \Rightarrow x + \frac{1}{2} + y - \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow x + y - \frac{4}{2} = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x + 2y - 4 = 0$$