PRIMER BLOQUE

A. Enuncia el teorema de Bolzano. Aplícalo para probar que la ecuación **2^{x-1} =1 + (1 + x)^2** tiene al menos una solución, determinando un intervalo **[a , b]** con $a \in \Re, b \in \Re$ y **a < b**, en el cual se encuentre dicha solución

Teorema de Bolzano

Si **f(x)** es continua en el intervalo **[a , b],** y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo **[sign f(a) $\neq$ sign f(b)]**, entonces existe, al menos, un punto $c \in (a , b)$ tal que **f(c) = 0**

Sea la función **f(x) = 2^{x-1} - 1 - (1 + x)^2,** tomemos el intervalo $[5 , 10]$, tomando los siguientes valores en el extremo del intervalo $\begin{cases} f(5) = 2^{5-1} - 1 - (1+5)^2 = 16 - 1 - 36 = -11 < 0 \\ f(10) = 2^{10-1} - 1 - (1+10)^2 = 512 - 1 - 121 = 390 > 0 \end{cases}$ de tal manera que $[sign\ f(5) \neq sign\ f(10)]$, entonces existe, al menos, un punto $c \in (0 , \pi)$tal que **f(c) = 0** y por ello **2^{c-1} - 1 - (1 + c)^2 = 0** por lo tanto **2^{c-1} = 1 + (1 + c)^2** existe, al menos, una solución de la ecuación propuesta

B. De entre todos los rectángulos de perímetro 20, ¿Cuál tiene diagonal menor?

Llamando **a** y **b** a los lados del rectángulo

$$\begin{cases} 2a + 2b = 20 \Rightarrow a + b = 10 \Rightarrow b = 10 - a \\ D = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} \Rightarrow D = \sqrt{a^2 + (10-a)^2} = \sqrt{a^2 + 100 - 20a + a^2} = \sqrt{2a^2 - 20a + 100}$$

$$D' = \frac{dD}{da} = \frac{4a - 20}{2\sqrt{2a^2 - 20a + 100}} = \frac{2a - 10}{\sqrt{2a^2 - 20a + 100}} \Rightarrow D' = 0 \Rightarrow 2\frac{a - 5}{\sqrt{2a^2 - 20a + 100}} = 0 \Rightarrow a - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$a = 5$$

$$D'' = \frac{d^2D}{da^2} = 2\frac{\sqrt{2a^2 - 20a + 100} - \frac{4a - 20}{2\sqrt{2a^2 - 20a + 100}}(a - 5)}{2a^2 - 20a + 100} 2\frac{\sqrt{2a^2 - 20a + 100} - \frac{(2a - 10)(a - 5)}{\sqrt{2a^2 - 20a + 100}}}{2a^2 - 20a + 100} \Rightarrow$$

$$D'' = 2\frac{\sqrt{2a^2 - 20a + 100} - \frac{4a - 20}{2\sqrt{2a^2 - 20a + 100}}(a - 5)}{2a^2 - 20a + 100} = 2\frac{\frac{2a^2 - 20a + 100 - (2a^2 - 10a - 10a + 50)}{\sqrt{2a^2 - 20a + 100}}}{2a^2 - 20a + 100}$$

$$D'' = 2\frac{2a^2 - 20a + 100 - 2a^2 + 20a - 50}{2(a^2 - 10a + 50)\sqrt{2a^2 - 20a + 100}} = \frac{100}{2(a^2 - 10a + 50)\sqrt{2a^2 - 20a + 100}}$$

$$D'' = \frac{50}{(a^2 - 10a + 50)\sqrt{2a^2 - 20a + 100}} \Rightarrow D''(5) = \frac{50}{(5^2 - 10 \cdot 5 + 50)\sqrt{2 \cdot 5^2 - 20 \cdot 5 + 100}} = \frac{50}{25\sqrt{50}} > 0 \Rightarrow$$

$$Mínimo \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 10 - 5 = 5 \end{cases}$$

SEGUNDO BLOQUE

A. Calcula el valor de la integral $\int_0^1 \frac{2\ arc\ tg\ x}{1+x^2}\,dx$ (siendo **arc tg 1** = $\frac{\pi}{4}$ y **arc tg 0 = 0**)

$$2\int_0^1 \frac{arc\ tg\ x}{1+x^2}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\ dt = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[t^2\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - 0^2\right] = \frac{\pi^2}{16}$$

$$arc\ tg\ x = t \Rightarrow \frac{dx}{1+x^2} = dt \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

B. Para la función $f(x)=\frac{Ln(x)}{x^2}$, donde **Ln (x)** significa logaritmo neperiano de **x**, se pide:

a) Determina las asíntotas horizontales de la función
b) Calcula el área comprendida entre la grafica de la función **f(x)**, el eje de abcisas y las rectas **x = e** y **x = e^2** (Observa que **f(x)** es positiva en el intervalo **[e , e^2]**)

a)

$$f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{Ln(x)}{x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{\infty}=0\Rightarrow$$
$$Existe\ asíntota\ horizontal, y=0, cuando\ x\to\infty$$

$$No\ hay\ asíntota\ cuando\ x\to-\infty\ ya\ que\ no\ esta\ definida\ la\ función$$

b)

$$A=\int_e^{e^2}\frac{Ln(x)}{x^2}\,dx=\int_e^{e^2}x^{-2}Ln(x)\,dx=-\left[\frac{Ln(x)}{x}\right]_e^{e^2}-\int_e^{e^2}\left(-\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x}=-\left(\frac{Ln\ e^2}{e^2}-\frac{Ln\ e}{e}\right)+\int_e^{e^2}\frac{dx}{x^2}$$

$$Por\ partes\begin{cases} Ln(x)=u\Rightarrow\frac{dx}{x} \\ x^{-2}\ dx=dv\Rightarrow v=\int x^{-2}\ dx=\frac{1}{(-1)}x^{-1}=-\frac{1}{x}\end{cases}$$

$$A=-\left(\frac{2Ln\ e}{e^2}-\frac{1}{e}\right)-\left[\frac{1}{x}\right]_e^{e^2}=-\left(\frac{2}{e^2}-\frac{1}{e}\right)-\left(\frac{1}{e^2}-\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}-\frac{2}{e^2}-\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e}=\frac{2}{e}-\frac{3}{e^2}=\frac{2e-3}{e^2}\,u^2$$

TERCER BLOQUE

A. a) Resuelve el sistema matricial $\begin{cases} 2X - Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$.

b) Resuelve la ecuación matricial **X . A - X = B** donde $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$a)$

$$\begin{cases} 2X - Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ -X + Y = (-1)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 2X - Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ -2X + 2Y = (-2)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} + (-2)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -8 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$b)$

$$XA - XI = B \Rightarrow X\,(A - I) = B \Rightarrow X\,(A - I)(A - I)^{-1} = B\,(A - I)^{-1} \Rightarrow XI = B\,(A - I)^{-1} \Rightarrow X = B\,(A - I)^{-1}$$

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A - I| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow Existe\ (A - I)^{-1} \Rightarrow$$

$$(A - I)^{-1} = \frac{1}{|A - I|}\cdot\left[adj\,(A - I)^t\right] \Rightarrow (A - I)^t = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow adj\,(A - I)^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(A - I)^{-1} = \frac{1}{(-2)}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = B(A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{(-2)}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$X = \frac{1}{(-2)}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(-2)}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

B.- a) Discute el sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \Re$

$$\begin{cases} x + ay + (1-a)z = 2 + a \\ x + 2az = a \\ 2x + ay - z = a \end{cases}$$

b) Cuando **a = -2** obtén una solución tal que **z = 0**

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1-a \\ 1 & 0 & 2a \\ 2 & a & -1 \end{vmatrix} = 4a^2 + a(1-a) - 2a^2 + a = 2a^2 + a - a^2 + a = a^2 + 2a \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow a^2 + 2a = 0 \Rightarrow$$

$$(a+2)\,a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2 \end{cases}$$

$$\forall a \in \Re - \{-2\ ,0\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$

Si $a = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 0z = -2 \Rightarrow z = -\dfrac{2}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \\ -3z = -4 \Rightarrow z = \dfrac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

Si $a = -2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -1 & -2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & -2 \\ 0 & 2 & -7 & -2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{La última ecuación es combinación lineal de}$$

$$\text{las otras dos} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

$$2y - 7z = 2 \Rightarrow 2y = 7z + 2 \Rightarrow y = \frac{7z+2}{2} \Rightarrow x - 2 \cdot \frac{7z+2}{2} + 3z = 0 \Rightarrow x - 7z - 2 + 3z = 0 \Rightarrow x = 4z + 2 \Rightarrow$$

$$Si\ z = 0 \Rightarrow y = \frac{7 \cdot 0 + 2}{2} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow x = 4 \cdot 0 + 2 = 2$$

$$\text{Solución general} \Rightarrow (x\ ,y\ ,z) = \left(4\lambda + 2\ ,1 + \frac{7\lambda}{2}\ ,\lambda\right)$$

CUARTO BLOQUE

A. a) Halla la ecuación general del plano π que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -3+2\lambda \end{cases}$, y es perpendicular al plano $\pi' \equiv x = 3$

b) Discute en función del parámetro $a \in \Re$ la posición relativa de los planos $\pi_1 \equiv x - 2y + 5z = 1$ y $\pi_2 \equiv -a^2 x + 2y - 5z = a$

a) El plano π está formado por el vector director de la recta **r**, el vector director del plano π' y el vector formado por un punto **R** cualquiera de la recta (tomamos el punto indicado en la ecuación) y el punto **G** genérico del plano.
Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector **RG** es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano

$$R(2\,,0\,,-3)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} \equiv (1\,,-1\,,2) \\ \overrightarrow{v_{\pi'}} \equiv (1\,,0\,,0) \\ \overrightarrow{RG} \equiv (x\,,y\,,z)-(2\,,0\,,-3) = (x-2\,,y\,,z+3) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z+3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2y + z + 3 = 0$$

b) Dos planos o son paralelos, entonces sus vectores directores son iguales o proporcionales, o coincidentes si además es también proporcional el termino independiente o se cortan según una recta al no ser proporcionales o iguales.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{\pi_1}} = (1\,,-2\,,5) \\ \overrightarrow{v_{\pi_2}} = (-a^2\,,2\,,-5) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{-a^2} = \frac{-2}{2} = \frac{5}{-5} \Rightarrow \frac{1}{-a^2} = -1 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\forall a \in \Re - \{-1\,,1\} \Rightarrow No\ hay\ proporcionalidad \Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ según\ una\ recta$$

$$Si\ a = -1 \Rightarrow\Rightarrow \pi_2 \equiv -x + 2y - 5z = -1$$

$$\begin{cases} \pi_1 \equiv x - 2y + 5z = 1 \\ \pi_2 \equiv -x + 2y - 5z = -1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{-1} = \frac{-2}{2} = \frac{5}{-5} = \frac{1}{-1} \Rightarrow Son\ coincidentes\ (el\ mismo\ plano)$$

$$Si\ a = 1 \Rightarrow \pi_2 \equiv -1^2 x + 2y - 5z = 1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \pi_1 \equiv x - 2y + 5z = 1 \\ \pi_2 \equiv -x + 2y - 5z = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{-1} = \frac{-2}{2} = \frac{5}{-5} \neq \frac{1}{1} \Rightarrow Son\ paralelos$$

B. Dado el plano $\alpha \equiv 2x+3y-2z=4$ y la recta $s \equiv \begin{cases} -x-y-az=2 \\ 3x+5y-6z=a \end{cases}$, se pide:

a) Analiza su posición relativa según los valores de los parámetros $a \in \Re$
b) Calcula la distancia de la recta al plano, en los casos **a = 0** y **a = 2**

a) Una recta respecto a un plano puede ser que este contenido en él, que sea paralela a él o que corte al plano en un punto.
En los dos casos primeros (coincidencia y paralelismo) los vectores directores de recta y plano son perpendiculares y su producto escalar es nulo, pero estudiado esa condición tendremos que ver si cualquier punto de la recta pertenece al plano (tomaremos la indicada en su ecuación) y de verificarse tal condición la recta esta contenida en el plano, de no darse es paralela. Si el producto escalar no es nulo se cortaran en un punto.

$$s \equiv \begin{cases} -3x-3y-3az=6 \\ 3x+5y-6z=a \end{cases} \Rightarrow 2y-(6+3a)z=a+6 \Rightarrow 2y=(a+6)+(6+3a)z \Rightarrow y=\frac{(a+6)+(6+3a)z}{2} \Rightarrow$$

$$x+\frac{(a+6)+(6+3a)z}{2}+az=-2 \Rightarrow x+\frac{(a+6)+(6+3a)z+2az}{2}=-2 \Rightarrow x+\frac{(a+6)+(6+5a)z}{2}=-2$$

$$x=-2-\frac{(a+6)+(6+5a)z}{2}=-\frac{4+(a+6)+(6+5a)z}{2}=-\frac{(a+10)+(6+5a)z}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \vec{v_s}=\left(-\frac{(6+5a)}{2}, \frac{(6+3a)}{2}, 1\right) \equiv [-(6+5a), (6+3a), 2] \\ \vec{v_\pi}=(2, 3, -2) \end{cases} \Rightarrow \vec{v_s} \perp \vec{v_\pi} \Rightarrow \vec{v_s} \cdot \vec{v_\pi}=0 \Rightarrow$$

$$(2, 3, -2) \cdot [-(6+5a), (6+3a), 2]=0 \Rightarrow -12-10a+18+9a-4=0 \Rightarrow -a+2=0 \Rightarrow a=2$$

$$\forall a \in \Re-\{2\} \Rightarrow \vec{v_s} \cdot \vec{v_\pi} \neq 0 \Rightarrow \vec{v_s} \not\perp \vec{v_\pi} \Rightarrow \textit{No son perpendiculares los vectores directores} \Rightarrow \textit{El plano y la recta se cortan en un punto}$$

$$\textit{Cuando } a=2 \Rightarrow \vec{v_s} \cdot \vec{v_\pi} \neq 0 \Rightarrow \vec{v_s} \perp \vec{v_\pi} \Rightarrow \textit{Son perpendiculares los vectores directores} \Rightarrow \textit{El plano y la recta son paralelos o coincidentes (lo estudiaremos en el cálculo de distancias)}$$

b) Cuando **a = 0** hay punto de corte **P** por lo tanto la distancia es nula, obtengamos ese punto

$$s \equiv \begin{cases} x=-5-6\lambda \\ y=3+6\lambda \\ z=2\lambda \end{cases} \Rightarrow 2\cdot(-5-6\lambda)+3\cdot(3+6\lambda)-2\cdot 2\lambda=0 \Rightarrow -10-12\lambda+9+18\lambda-4\lambda=0 \Rightarrow 2\lambda-1=0 \Rightarrow$$

$$2\lambda=1 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{2} \Rightarrow P \begin{cases} x=-5-6\cdot\frac{1}{2}=-8 \\ y=3+6\cdot\frac{1}{2}=6 \\ z=2\cdot\frac{1}{2}=1 \end{cases} \Rightarrow P(-8, 6, 1) \Rightarrow \textit{La distancia es nula}$$

Continuación del Problema B del Cuarto Bloque

b) Continuación

Cuando **a = 2** son paralelos hallaremos la distancia de un punto **S** cualquiera de la recta (tomaremos el indicado en su ecuación) al plano

$$s \equiv \begin{cases} x = -\dfrac{(a+10)}{2} - (6+5a)z \\ y = \dfrac{(a+6)}{2} + (6+3a)\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow a = 2 \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -6 - 16\lambda \\ y = 4 + 12\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow S(-6\ ,4\ ,0)$$

$$d(s\ ,\alpha) = d(S\ ,\alpha) = \frac{|2\cdot(-6)+3\cdot 4-2\cdot 0-4|}{\sqrt{2^2+3^2+(-2)^2}} = \frac{|-12+12-4|}{\sqrt{17}} = \frac{|-4|}{\sqrt{17}} = \frac{4\sqrt{17}}{17}\ u \Rightarrow$$

Comprobamos, además, que la recta no esta contenida en el plano o sea que recta y plano son paralelos