

PRIMER BLOQUE

A. Enuncia el teorema de Bolzano. Aplícalo para probar que la ecuación **sen x = x² - 1** tiene al menos una solución. (Indicación: El ángulo x lo consideraremos en radianes)

Teorema de Bolzano

Si **f(x)** es continua en el intervalo **[a, b]**, y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo **[sign f(a) ≠ sign f(b)]**, entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que **f(c) = 0**

Sea la función $f(x) = \text{sen } x - (x^2 - 1) = \text{sen } x - x^2 + 1$, tomemos el intervalo $[0, \pi]$, tomando los

siguientes valores en el extremo del intervalo $\begin{cases} f(0) = \text{sen } 0 - 0^2 + 1 = 0 + 0 + 1 = 1 > 0 \\ f(\pi) = \text{sen } \pi - \pi^2 + 1 = 0 - \pi^2 + 1 = -\pi^2 + 1 < 0 \end{cases}$

de tal manera que $[\text{sign } f(0) \neq \text{sign } f(\pi)]$, entonces existe, al menos, un punto $c \in (0, \pi)$ tal que **f(c) = 0** y por ello **sen c - c² + 1 = 0** por lo tanto **sen c = c² - 1** existe, al menos, una solución de la ecuación propuesta

B. De entre todos los triángulos rectángulos cuya hipotenusa mide 3 metros, determina la medida de los catetos de aquel que tenga área máxima

Llamando **a** y **b** a los catetos

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 3^2 \Rightarrow b^2 = 9 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{9 - a^2} \\ A = \frac{1}{2}ab \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2}a\sqrt{9 - a^2} \Rightarrow A' = \frac{dA}{da} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{9 - a^2} + \frac{-2a}{2\sqrt{9 - a^2}}a \right)$$

$$A' = \frac{1}{2} \left(\sqrt{9 - a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{9 - a^2}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{9 - a^2 - a^2}{\sqrt{9 - a^2}} \right) = \frac{1}{2} \frac{9 - 2a^2}{\sqrt{9 - a^2}} \Rightarrow A' = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{9 - 2a^2}{\sqrt{9 - a^2}} = 0 \Rightarrow 9 - 2a^2 = 0 \Rightarrow$$

$$2a^2 = 9 \Rightarrow a^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow a = \pm \sqrt{\frac{9}{2}} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ a = -\frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{No es solución por ser negativo} \end{cases}$$

$$A'' = \frac{d^2A}{da^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-4a\sqrt{9 - a^2} - \frac{-2a}{2\sqrt{9 - a^2}}(9 - 2a^2)}{9 - a^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-4a\sqrt{9 - a^2} + \frac{a(9 - 2a^2)}{\sqrt{9 - a^2}}}{9 - a^2} =$$

$$A'' = \frac{1}{2} \cdot \frac{-4a(9 - a^2) + a(9 - 2a^2)}{\sqrt{9 - a^2}(9 - a^2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-36a + 4a^3 + 9a - 2a^3}{\sqrt{9 - a^2}(9 - a^2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a^3 - 27a}{(9 - a^2)\sqrt{9 - a^2}}$$

Continuación del Problema B del Primer Bloque

$$A''\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)}{2} \cdot \frac{2\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 27}{\left[9 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2\right] \sqrt{9 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{2\left(\frac{18}{4}\right) - 27}{\left(9 - \frac{18}{4}\right) \sqrt{9 - \frac{18}{4}}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{9 - 27}{\frac{18}{4} \sqrt{\frac{18}{4}}} < 0 \Rightarrow \text{Max.}$$

$$\begin{cases} a = \frac{3\sqrt{2}}{2} m. \\ b = \sqrt{9 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{9 - \frac{18}{4}} = \sqrt{\frac{18}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} m \end{cases}$$

SEGUNDO BLOQUE

A. Sea $a \in \mathbb{R}$ una constante real no nula, y considera la parábola $f(x) = ax^2 - 4a$. Encuentra el valor de a para que se verifiquen simultáneamente las dos siguientes condiciones: 1ª que el área comprendida entre la parábola y el eje de abscisas sea de **32** unidades cuadradas. 2ª que la función $f(x)$ sea cóncava hacia arriba ($\cup$)

1ª

$$\text{Puntos de corte con } OX \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow ax^2 - 4a = 0 \Rightarrow a \cdot (x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$f(-x) = a(-x)^2 - 4a = ax^2 - 4a = f(x) \Rightarrow \text{Simétrico respecto a } OY$$

$$1 \in (0, 2) \Rightarrow f(1) = a \cdot 1^2 - 4a = -3a \Rightarrow \text{Negativo}$$

$$32 = 2 \cdot \left| \int_0^2 (ax^2 - 4a) dx \right| \Rightarrow 16 = \int_0^2 (-ax^2 + 4a) dx \Rightarrow 16 = -a \cdot \frac{1}{3} \cdot [x^3]_0^2 + 4a \cdot [x]_0^2 \Rightarrow$$

$$16 = -\frac{a}{3} \cdot (2^3 - 0^3) + 4a \cdot (2 - 0) \Rightarrow 16 = -\frac{8a}{3} + 8a \Rightarrow 16 = \frac{-8a + 24a}{3} \Rightarrow 16 = \frac{16a}{3} \Rightarrow 16a = 48 \Rightarrow a = 3$$

2ª

$$f(x) = 3x^2 - 4 \cdot 3 = 3x^2 - 12 \Rightarrow f'(x) = 6x \Rightarrow f''(x) = 6 > 0 \Rightarrow \text{Concava en todo su dominio}$$

B. Encuentra una primitiva de $x^2 \sen x$ que pase por el origen de coordenadas.

$$F(x) = \int x^2 \sen x \, dx = -x^2 \cos x - \int (-\cos x) 2x \, dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx = -x^2 \cos x + x \sen x - \int \sen x \, dx$$

$$\text{Por partes} \begin{cases} x^2 = u \Rightarrow 2x \, dx = du \\ \sen x \, dx = dv \Rightarrow v = \int \sen x \, dx = -\cos x \end{cases} \quad \begin{cases} x = u \Rightarrow dx = du \\ \cos x \, dx = dv \Rightarrow v = \int \cos x \, dx = \sen x \end{cases}$$

$$F(x) = -x^2 \cos x + x \sen x - (-\cos x) = -x^2 \cos x + x \sen x + \cos x + K \Rightarrow$$

$$F(0) = 0 \Rightarrow -0^2 \cdot \cos 0 + 0 \cdot \sen 0 + \cos 0 + K = 0 \Rightarrow 0 + 0 + 1 + K = 0 \Rightarrow K = -1 \Rightarrow$$

$$F(x) = -x^2 \cos x + x \sen x + \cos x - 1$$

TERCER BLOQUE

A. Razona si existe la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y, en caso afirmativo, calcúlala.

Resuelve la ecuación matricial $A \cdot X + 2A = I_3$ donde X es una matriz 3×3 e I_3 es la matriz identidad de orden 3

Para que una matriz tenga inversa es condición necesaria que su determinante no sea nulo

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{adj } A^t) \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj } A^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(-1)} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AX = I_3 - 2A \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(I_3 - 2A) \Rightarrow IX = A^{-1}I_3 - 2A^{-1}A \Rightarrow X = A^{-1} - 2I_3$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

B.- Discute el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + y = 4 \\ ax - y = 6 \\ x - ay = -6 \end{cases}$ en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

resolviendo cuando sea compatible determinado

Este sistema será compatible (indeterminado o determinado) cuando una de sus ecuaciones, al menos, sea combinación lineal de las otras y, por ello, el determinante de la matriz de los coeficientes ampliada tiene que ser nulo.

$$|A/B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ a & -1 & 6 \\ 1 & -a & -6 \end{vmatrix} = 6 + 6 - 4a^2 + 4 + 6a + 6a = -4a^2 + 12a + 16 \Rightarrow \text{Si } |A/B| = 0 \Rightarrow -4a^2 + 12a + 16 = 0 \Rightarrow$$

$$(-4) \cdot (a^2 - 3a - 4) = 0 \Rightarrow a^2 - 3a - 4 = 0 \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25 > 0 \Rightarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = -1 \end{cases}$$

$\forall a \in \mathbb{R} - \{-1, 4\} \Rightarrow |A/B| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A/B) = 3 \neq \text{rang}(A) = 2 \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$

Si $a = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & -6 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 0z = 2 \Rightarrow z = \frac{2}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \Rightarrow$$

$\text{rang}(A) = 1 \neq \text{rang}(A/B) = 2 \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$

Continuación del Problema B del Tercer Bloque

Si $a = 4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 6 \\ 1 & -4 & -6 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & -5 & -10 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A/B) = \text{rang}(A) = 2 \Rightarrow \text{Compatible Determinado}$$

$$-5y = -10 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x + 2 = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \text{Solución} \Rightarrow (x, y) = (2, 2)$$

CUARTO BLOQUE

A. Dadas las rectas: $r \equiv \begin{cases} z = 4 \\ x - y = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} z = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$, se pide:

a) Estudia su posición relativa

b) Determina los puntos $R \in r$ y $S \in s$ por los que se alcanza la distancia mínima entre ambas rectas

a) Analizaremos si las rectas tienen un punto común, de tenerlo estudiaremos si los vectores directores son iguales o proporcionales, si este caso se da, las rectas son coincidentes, de no darse este último supuesto las rectas se cortan en un punto, son secantes.

Si no tienen punto común, y hay igualdad o proporcionalidad entre los vectores directores las rectas son paralelas, de no haberlo las rectas se cruzan en el espacio

$$\begin{cases} \begin{cases} z = 4 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} z = 0 \\ x = 2 - y \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 2 - \mu \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 - \mu \\ \lambda = \mu \\ 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Como } 4 \neq 0 \Rightarrow \text{Sistema Incompatible} \Rightarrow$$

No son coincidentes ni se cortan en un punto

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (1, 1, 0) \\ \vec{v}_s = (-1, 1, 0) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1} \Rightarrow \text{No son proporcionales} \Rightarrow \text{No son paralelas}$$

Las rectas se cruzan en el espacio

b) Hallaremos una recta t que es perpendicular a r y a s y cuyo vector director es la de una recta que se apoya en las dos rectas dadas y cuyos productos escalares con los directores de la recta son nulos

$$\begin{cases} \vec{v}_t = (\lambda - (2 - \mu), \lambda - \mu, 0 - 0) = (\lambda + \mu - 2, \lambda - \mu, 0) \\ \vec{v}_r = (1, 1, 0) \\ \vec{v}_s = (-1, 1, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_t \perp \vec{v}_r \Rightarrow \vec{v}_t \cdot \vec{v}_r \Rightarrow (\lambda + \mu - 2, \lambda - \mu, 0) \cdot (1, 1, 0) \\ \vec{v}_t \perp \vec{v}_s \Rightarrow \vec{v}_t \cdot \vec{v}_s \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\lambda + \mu - 2, \lambda - \mu, 0) \cdot (1, 1, 0) = 0 \Rightarrow \lambda + \mu - 2 + \lambda - \mu = 0 \Rightarrow 2\lambda - 2 = 0 \Rightarrow 2\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = 1 \\ (\lambda + \mu - 2, \lambda - \mu, 0) \cdot (-1, 1, 0) = 0 \Rightarrow -\lambda - \mu - 2 + \lambda - \mu = 0 \Rightarrow -2\mu - 2 = 0 \Rightarrow -2\mu = 2 \Rightarrow \mu = -1 \end{cases}$$

$$\text{De la recta } r \Rightarrow R(1, 1, 4)$$

$$\text{De la recta } s \Rightarrow S(2 - (-1), -1, 0) \Rightarrow S(3, -1, 0)$$

B. Dado el plano $\pi \equiv x + y + z = 2$ y las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x = 1 + s \\ y = -s \\ z = 2 \end{cases}, s \in \mathbb{R}$

- a) ¿Existe algún plano paralelo a π que contenga a r_1 ?
 b) ¿Existe algún plano paralelo a π que contenga a r_2 ?
 c) Si en algún caso la respuesta es afirmativa, halla la ecuación general de dicho plano

a y b) Si la recta y el plano son paralelos sus vectores directores son perpendiculares y su producto escalar nulo

a)

$$\begin{cases} \vec{v}_\pi = (1, 1, 1) \\ \vec{v}_{r_1} = (1, -1, 2) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_{r_1} = (1, 1, 1) \cdot (1, -1, 2) = 1 - 1 + 2 = 2 \neq 0 \Rightarrow$$

No son perpendiculares los vectores directores por lo tanto π y r_1 no son paralelos

b)

$$\begin{cases} \vec{v}_\pi = (1, 1, 1) \\ \vec{v}_{r_2} = (1, -1, 0) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_{r_2} = (1, 1, 1) \cdot (1, -1, 0) = 1 - 1 + 0 = 0 \Rightarrow \vec{v}_\pi \perp \vec{v}_{r_2}$$

Son perpendiculares los vectores directores por lo tanto π y r_2 son paralelos

c) Es un plano α que tiene como vectores directores al del plano π y al de la recta r_2 y por el vector formado por un punto cualquiera R de la recta r_2 (tomaremos el indicado en su ecuación) y G siendo este el punto generador de la recta.

Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector RG es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano

$$R = (1, 0, 2)$$

$$\begin{cases} \vec{v}_\pi = (1, 1, 1) \\ \vec{v}_{r_2} = (1, -1, 0) \\ \vec{RG} = (x, y, z) - (1, 0, 2) = (x-1, y, z-2) \end{cases} \Rightarrow \alpha \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y - (z-2) - (z-2) + (x-1) = 0$$

$$x - 1 + y - 2(z - 2) = 0 \Rightarrow \alpha \equiv x + y - 2z + 3 = 0$$