PRIMER BLOQUE

A. Dadas las funciones $f(x) = ln\left(1-x^2\right)\ y\ g(x) = ln\left(1+x^2\right)$, se pide:

a) Determina el dominio de cada una de ellas

b) Estudia si dichas funciones tienen puntos de inflexión

$a)$

$$1-x^2>0 \Rightarrow (1+x)\cdot(1-x)>0 \Rightarrow \begin{cases} 1+x>0 \Rightarrow x>-1 \\ 1-x>0 \Rightarrow -x>-1 \Rightarrow x<1 \end{cases}$$

	$-\infty$	-1	1	∞
x > -1	**(-)**	**(+)**	**(+)**	
x < 1	**(+)**	**(+)**	**(-)**	
Solución	**(-)**	**(+)**	**(-)**	

$$Dom(f) = \forall x \in \Re / -1 < x < 1$$

$$1+x^2>0 \Rightarrow x^2>-1 \Rightarrow x>\pm\sqrt{-1} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow 1+x^2>0 \Rightarrow \forall x \in \Re \Rightarrow Dom(g) = \forall x \in \Re$$

$b)$

$$f'(x) = \frac{-2x}{1-x^2} \Rightarrow f''(x) = -2\frac{\left(1-x^2\right)-(-2x)x}{\left(1-x^2\right)^2} = -2\frac{1-x^2+2x^2}{\left(1-x^2\right)^2} = -2\frac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)^2} \Rightarrow$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -2\frac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)^2} = 0 \Rightarrow 1+x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow No\ tiene\ Pun.\ inf\ l.$$

$$g'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow g''(x) = 2\frac{\left(1+x^2\right)-2xx}{\left(1+x^2\right)^2} = 2\frac{1+x^2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = 2\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$g''(x) = 0 \Rightarrow 2\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = 0 \Rightarrow 1-x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} \Rightarrow Posibles\ puntos\ de\ inf\ lexión$$

$$g'''(x) = 2\frac{-2x\left(1+x^2\right)^2-2\left(1+x^2\right)2x\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^4} = 2\frac{-2x\left(1+x^2\right)-4x\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^3} = 2\frac{-2x-2x^3-4x+4x^3}{\left(1+x^2\right)^3} =$$

$$g'''(x) = 4x\frac{x^2-3}{\left(1+x^2\right)^3} \Rightarrow \begin{cases} g'''(1) = 4\cdot 1\frac{1^2-3}{\left(1+1^2\right)^3} = \frac{-8}{8} = -1 \neq 0 \Rightarrow Punto\ de\ inf\ lexión\ en\ x=1 \\ g'''(-1) = 4\cdot(-1)\frac{(-1)^2-3}{\left[1+(-1)^2\right]^3} = \frac{8}{8} = 1 \neq 0 \Rightarrow Punto\ de\ inf\ lexión\ en\ x=-1 \end{cases}$$

www.yoquieroaprobar.es

B. Determinar el valor de los parámetros $a,b \in \Re$ para que la función $f(x)=(ax^2+bx)e^{-x}$ tenga un extremos relativo en el punto de abcisa **x = 3** y, además, pase por el punto $\left(1,-\frac{1}{e}\right)$.

Halla la ecuación de la recta tangente a f(x) en el punto de abcisa **x = 0**

$$f'(x)=(2ax+b)e^{-x}-(ax^2+bx)e^{-x}=(2ax+b-ax^2-bx)e^{-x}=\left[-ax^2+(2a-b)x+b\right]e^{-x}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} f(1)=-\frac{1}{e}\Rightarrow(a\cdot 1^2+b\cdot 1)e^{-1}=-\frac{1}{e}\Rightarrow\frac{a+b}{e}=-\frac{1}{e}\Rightarrow a+b=-1 \\ f'(3)=0\Rightarrow\left[-a\cdot 3^2+(2a-b)\cdot 3+b\right]e^{-3}=0\Rightarrow\frac{-9a+6a-3b+b}{e^3}=0\Rightarrow -3a-2b=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a+2b=-2\\-3a-2b=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$-a=-2\Rightarrow a=2\Rightarrow 2+b=-1\Rightarrow b=-3\Rightarrow f(x)=(2x^2-3x)e^{-x}$$

$$f'(x)=(4x-3)e^{-x}-(2x^2-3x)e^{-x}=(-2x^2+7x-3)e^{-x}\Rightarrow\begin{cases}f(0)=(2\cdot 0^2-3\cdot 0)e^0=1\\ m=f'(0)=(-2\cdot 0^2+7\cdot 0-3)e^0=-3\end{cases}\Rightarrow$$

$$Ecuación\ tangente\Rightarrow y-1=-3(x-0)\Rightarrow y=-3x+1\Rightarrow 3x+y-1=0$$

SEGUNDO BLOQUE

A. De la función $f(x)=(x+a)\,sen(x)$, donde **a** es un número real, se sabe que la integral definida $\int_0^{\pi} f(x)\,dx$ es tres veces el valor de la pendiente de la recta tangente a f(x) en el punto de abcisa **x = 0**. Calcula el valor de **a**

$$f'(x)=sen(x)+(x+a)\cos(x)\Rightarrow m=f'(0)=sen\,0+(0+a)\cos 0=0+a\cdot 1=a$$

$$3a=\int_0^{\pi}(x+a)\,sen(x)\,dx\Rightarrow 3a=-\left[(x+a)\cos(x)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\left[-\cos(x)\right]dx\Rightarrow$$

$$\begin{cases} x+a=u\Rightarrow dx=du \\ sen(x)\,dx=dv\Rightarrow v=\int sen(x)\,dx=-\cos(x)\end{cases}$$

$$3a=-\left[(\pi+a)\cos(\pi)-(0+a)\cos(0)\right]+\int_0^{\pi}\cos(x)\,dx\Rightarrow 3a=-\left[(\pi+a)\cdot(-1)-a\cdot 1\right]+\left[sen(x)\right]_0^{\pi}$$

$$3a=-\left[-\pi-a-a\right]+\left[sen(\pi)-sen(0)\right]\Rightarrow 3a=-(-\pi-2a)+(0-0)\Rightarrow a=\pi+2a\Rightarrow -a=\pi\Rightarrow a=-\pi$$

B. Definición de primitiva de una función. Sabiendo que $F(x)=e^{x^2}$ es una primitiva de la función **f(x)**:

a) Comprueba que **f(x)** es una función creciente en $\Re$

b) Calcula el área determinada por la gráfica de **f(x),** el eje de abcisas y las rectas **x = -1** y **x = 1**

Dadas dos funciones, **f(x)** y **F(x)**, definidas en un intervalo **S = [a , b]**, diremos que **F(x)** es una función **primitiva** de **f(x)** si la derivada de **F(x)** es la función **f(x)** en el intervalo **S**

$$F(x)\ es\ primitiva\ de\ f(x)\ en\ S\Leftrightarrow F'(x)=f(x),\forall x\in S$$

www.yoquieroaprobar.es

Continuación del Problema B del Segundo Bloque

a)

$$f(x)=F'(x)=2xe^{x^2} \Rightarrow f'(x)=F''(x)=2\left(e^{x^2}+2xxe^{x^2}\right)=2e^{x^2}\left(1+2x^2\right)\Rightarrow Creciente \Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow$$

$$2e^{x^2}\left(1+2x^2\right)>0\Rightarrow\begin{cases} 2>0\Rightarrow\forall x\in\Re \\ e^{x^2}>0\Rightarrow\forall x\in\Re \\ 1+2x^2>0\Rightarrow 2x^2>-1\Rightarrow x^2>-\dfrac{1}{2}\Rightarrow x>\pm\sqrt{-\dfrac{1}{2}}\Rightarrow Sin\ solución\Rightarrow\forall x\in\Re\end{cases}$$

Como es creciente para los tres factores del producto,la función es creciente en todo $\Re$

b)

Punto de corte con OX $\Rightarrow y=0\Rightarrow 2xe^{x^2}=0\Rightarrow x=0$

$$\begin{cases} f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)e^{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=-e^{\frac{1}{4}}\Rightarrow Negativo\Rightarrow x\in\left[-1\ ,0\right] \\ f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)e^{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=e^{\frac{1}{4}}\Rightarrow Positiva\Rightarrow x\in\left[0\ ,1\right]\end{cases}$$

$$f(-x)=2(-x)e^{(-x)^2}=-2xe^{x^2}=-f(x)\Rightarrow Simétrica\ respecto\ al\ origen\ de\ coordenadas$$

$$A=2\int_0^1 2xe^{x^2}dx=2\int_0^1 e^t dt=2\cdot\left[e^t\right]_0^1=2\cdot\left(e^1-e^0\right)=2\cdot(e-1)u^2$$

$$x^2=t\Rightarrow 2x\,dx=dt\Rightarrow\begin{cases} x=1\Rightarrow t=1 \\ x=0\Rightarrow t=0\end{cases}$$

<u>TERCER BLOQUE</u>

A. Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & -3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 7 & 1\end{vmatrix}=6$, calcular el valor de $\begin{vmatrix} \frac{z}{2} & z+7 & 3 \\ \frac{y}{2} & y & 3 \\ \frac{x}{2} & x-3 & 3\end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} x & -3 & 1 & 2 \\ y & 0 & 1 & 2 \\ z & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 2\end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} \frac{z}{2} & z+7 & 3 \\ \frac{y}{2} & y & 3 \\ \frac{x}{2} & x-3 & 3\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} z & z+7 & 3 \\ y & y & 3 \\ x & x-3 & 3\end{vmatrix}=\frac{3}{2}\cdot\begin{vmatrix} z & z+7 & 1 \\ y & y & 1 \\ x & x-3 & 1\end{vmatrix}=\frac{3}{2}\cdot\begin{vmatrix} z & z & 1 \\ y & y & 1 \\ x & x & 1\end{vmatrix}+\frac{3}{2}\cdot\begin{vmatrix} z & 7 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ x & -3 & 1\end{vmatrix}=$$

$$\frac{3}{2}\cdot 0+\frac{3}{2}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} x & -3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 7 & 1\end{vmatrix}=-\frac{3}{2}\cdot 6=-9$$

www.yoquieroaprobar.es

Continuación del Problema A del Tercer Bloque

$$\begin{vmatrix} x & -3 & 1 & 2 \\ y & 0 & 1 & 2 \\ z & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} x & -3 & 1 & 1 \\ y & 0 & 1 & 1 \\ z & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 6\cdot\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 1 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} x & -3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 7 & 1 \end{vmatrix} = 12\cdot 0 + 2\cdot 6 = 12$$

B. a) Clasifica el sistema $\begin{cases} x-2y+az=0 \\ -ay+2z=0 \\ 2x-y+(a+1)z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ en función del parámetro $a\in\Re$, y resuélvelo para **a = -2**

Es un sistema homogéneo, lo que quiere decir que, menos para aquellos valores que hagan que el rango de los coeficientes sea dos o menor de dos que en ese caso es compatible indeterminado, todos los demás valores nos dan un sistema compatible determinado con una única solución la llamada trivial **(0 , 0 , 0)**

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 0 & -a & 2 \\ 2 & -1 & a+1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 0 & -a & 2 \\ 0 & 3 & a+1-2a \\ 0 & 3 & 1-a \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 0 & -1 & \frac{2}{a} \\ 0 & 3 & 1-a \\ 0 & 3 & 1-a \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 0 & -1 & \frac{2}{a} \\ 0 & 0 & 1-a+\frac{6}{a} \\ 0 & 0 & 1-a+\frac{6}{a} \end{pmatrix} \Rightarrow 1-a+\frac{6}{a}=0 \Rightarrow$$

$$-a^2+a+6=0 \Rightarrow a^2-a-6=0 \Rightarrow \Delta=(-1)+4\cdot 1\cdot(-6)=1+24=25\geq 0 \Rightarrow a=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1+5}{2}=3 \\ a=\frac{1-5}{2}=-2 \end{cases}$$

$$\forall a\in\Re-\{-2\,,3\} \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$Cuando\ a=3 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$$Cuando\ a=-2 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -y-z=0 \Rightarrow y=-z \Rightarrow x-2\cdot(-z)-2z=0 \Rightarrow x+2z-2z=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow$$

$$Solución \Rightarrow (x\,,y\,,z)=(0\,,-\lambda\,,\lambda)$$

www.yoquieroaprobar.es

CUARTO BLOQUE

A.- Dados el plano $\pi \equiv x - y + z + k = 0$, donde $k \in \Re$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-3}{2} = y + 1 = -z$, se pide:

a) Demuestra que para cualquier valor de $k \in \Re$, la recta **r** es paralela al plano π

b) Determina el valor de $k \in \Re$ de forma que la recta **r** este contenida en el plano π

a) Los vectores directores, si son paralelos, son perpendiculares y su producto escalar nulo

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (1\,,-1\,,1) \\ \overrightarrow{v_r} = (2\,,1\,,-1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{v_r} = (1\,,-1\,,1)\cdot(2\,,1\,,-1) = 2-1-1=0 \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{v_r} \Rightarrow$$

$$El\ \ plano\ \pi\ y\ la\ recta\ r\ son\ paralelos$$

b) Si esta contenida en el plano, aparte de ser perpendicular al plano como ya se ha demostrado en el apartado anterior, un punto **R** cualquiera de la recta r (tomaremos el indicado en su ecuación) debe de pertenecer al plano

$$R(3\,,-1\,,0) \Rightarrow 3-(-1)+0+k=0 \Rightarrow 4+k=0 \Rightarrow k=-4$$

B. Dado el punto **P(2 , 2 , 1)** y el plano π de ecuaciones $\begin{cases} x = 1+t-s \\ y = 1-t+s \\ z = t \end{cases}$, se pide:

a) Distancia del punto P al plano π
b) Ecuaciones generales de la que pasa por el punto **P** y es perpendicular a π'

Para hallar la ecuación del plano π utilizaremos los vectores determinados en su ecuación y el vector formado por el punto **Q** indicado en la ecuación y **G**, siendo este el punto genérico del plano que se quiere hallar.

Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector **QG** es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_1} = (1\,,-1\,,1) \\ \overrightarrow{v_2} = (-1\,,1\,,0) \\ \overrightarrow{QG} = (x\,,y\,,z)-(1\,,1\,,0) = (x-1\,,y-1\,,z) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(y+1)+z-z-(x-1)=0 \Rightarrow$$

$$-(x-1)-(y-1)=0 \Rightarrow \pi \equiv x+y-2=0 \Rightarrow$$

$$d(P\,,\pi) = \frac{|2+2-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\ u$$

b) El vector de la recta **s** perpendicular al plano tiene como vector director el del plano

$$\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{v_\pi} = (1\,,1\,,0) \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = 1 \end{cases}$$