PRIMER BLOQUE

A. Determinar el valor de $k \in \Re,\ k \neq 0$, para que se cumpla que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{kx} - kx - 1}{kx^2} = \lim_{x\to 0} \frac{8\ sen\ (x) + 2\ tg\ (x)}{x + sen\ (x)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{8\ sen\ (x) + 2\ tg\ (x)}{x + sen\ (x)} = \frac{8\ sen\ (0) + 2\ tg\ (0)}{0 + sen\ (0)} = \frac{8\cdot 0 + 2\cdot 0}{0+0} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x\to 0} \frac{8\ cos\ (x) + \frac{2}{cos^2\ (x)}}{1 + cos\ (x)} =$$

$$= \frac{8\ cos\ (0) + \frac{2}{cos^2\ (0)}}{1 + cos\ (0)} = \frac{8\cdot 1 + \frac{2}{1^2}}{1+1} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{kx} - kx - 1}{kx^2} = \frac{e^{k\cdot 0} - k\cdot 0 - 1}{k\cdot 0^2} = \frac{e^0 - 0 - 1}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x\to 0} \frac{ke^{kx} - k}{2kx} = \lim_{x\to 0} \frac{k\left(e^{kx} - 1\right)}{2kx} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{kx} - 1}{2x} = \frac{e^{k\cdot 0} - 1}{2\cdot 0} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x\to 0} \frac{ke^{kx}}{2} \Rightarrow \frac{ke^{k\cdot 0}}{2} = 5 \Rightarrow \frac{ke^0}{2} = 5 \Rightarrow \frac{k}{2} = 5 \Rightarrow k = 10$$

B. Determinar los valores de $a, b, c \in \Re$ para que la función $f(x) = ax^3 + bx + c$ pase por el punto **(2 , 8)**, tenga un mínimo relativo en $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y además la recta tangente a **f(x)** en el punto de abcisa **x = 1** tenga pendiente **4**. Calcula la ecuación de la recta normal a **f(x)** en el punto de abcisa **x = 1**

$$f'(x) = 3ax^2 + b \Rightarrow \begin{cases} f(2) = 8 \Rightarrow a\cdot 2^3 + b\cdot 2 + c = 8 \Rightarrow 8a + 2b + c = 8 \\ f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0 \Rightarrow 3a\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + b = 0 \Rightarrow \frac{3\cdot 3}{9}a + b = 0 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow \begin{cases} -a - b = 0 \\ 3a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow \\ f'(1) = 4 \Rightarrow 3a\cdot 1^2 + b = 4 \Rightarrow 3a + b = 4 \end{cases}$$

$$2a = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow 2 + b = 0 \Rightarrow b = -2 \Rightarrow 8\cdot 2 + 2\cdot(-2) + c = 8 \Rightarrow 16 - 4 + c = 8 \Rightarrow c = -4$$

$$f(x) = 2x^3 - 2x - 4 \Rightarrow$$

$$Ecuación\ recta\ normal \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 2\cdot 1^3 - 2\cdot 1 - 4 = -4 \\ m = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow y + 4 = -\frac{1}{4}(x-1) \Rightarrow y = -\frac{x}{4} + \frac{1}{4} - 4 \Rightarrow$$

$$y = -\frac{x+15}{4} \Rightarrow 4y = -x + 15 \Rightarrow x + 4y - 15 = 0$$

SEGUNDO BLOQUE

A. Calcula el área determinada por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 9x$ y el eje de abcisa

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX \Rightarrow (x^2 - 9)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \Rightarrow \\ x = 3 \end{cases} \end{cases}$$

$$f(-x) = (-x)^3 - 9(-x) = -x^3 + 9x = -(x^3 - 9x) = -f(x) \Rightarrow Simétrico\ respecto\ de\ O\ (0rigen\ de\ coordenadas)$$

$$2 \in (0\ ,3) \Rightarrow f(2) = 2^3 - 9 \cdot 2 = 8 - 18 = -10 < 0 \Rightarrow Negativo$$

$$A = 2\left|\int_0^3 (x^3 - 9x)\,dx\right| = 2\int_0^3 (-x^3 + 9x)\,dx = -2 \cdot \frac{1}{4} \cdot [x^4]_0^3 + 2 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_0^3 = -\frac{1}{2} \cdot (3^4 - 0^4) + 9 \cdot (3^2 - 0^2)$$

$$A = -\frac{81}{2} + 81 = \frac{81}{2}\,u^2$$

B. Calcula las siguientes integrales $a)\int ln\ x\ dx \quad b)\int tg\ x\ dx$

$a)$

$$\int ln\ x\ dx = x\ ln\ x - \int x\frac{dx}{x} = x\ ln\ x - \int dx = x\ ln\ x - x = x\,(ln\ x - 1) + K$$

$$Por\ \ partes \begin{cases} ln\ x = u \Rightarrow \dfrac{dx}{x} = du \\ dx = dv \Rightarrow v = \int dx = x \end{cases}$$

$b)$

$$\int tg\ x\ dx = \int \frac{sen\ x}{cos\ x}\,dx = \int \frac{-du}{u} = -\int \frac{du}{u} = -ln\ u = -ln\ cos\ x + K$$

$$Cambio\ de\ variable \Rightarrow cos\ x = u \Rightarrow -sen\ x\ dx = du \Rightarrow sen\ x\ dx = -du$$

<u>**TERCER BLOQUE**</u>

A. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcula $\mathbf{A^2}$

b) Resuelve la ecuación matricial $\mathbf{6A^{10}. X = 3X + I_3}$, siendo $\mathbf{I_3}$ la matriz identidad de orden **3**

$a)$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Continuación del Problema A del Tercer Bloque

b)

$$A^{10}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\left(6A^{10}-3I\right)X=I\Rightarrow\left(6A^{10}-3I\right)^{-1}\left(6A^{10}-3I\right)X=\left(6A^{10}-3I\right)^{-1}I\Rightarrow X=\left(6A^{10}-3I\right)^{-1}I\Rightarrow$$

$$X=\left(6A^{10}-3I\right)^{-1}$$

$$6A^{10}-3I=6\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&3\\0&6&0\\3&0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&3\\0&3&0\\3&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left|6A^{10}-3I\right|=\begin{vmatrix}0&0&3\\0&3&0\\3&0&0\end{vmatrix}=-27\Rightarrow Existe\ \left(6A^{10}-3I\right)^{-1}\Rightarrow\left(6A^{10}-3I\right)^{-1}=\frac{1}{\left|6A^{10}-3I\right|}\cdot\left[adj\left(6A^{10}-3I\right)^{t}\right]\Rightarrow$$

$$\left(6A^{10}-3I\right)^{t}=\begin{pmatrix}0&0&3\\0&3&0\\3&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow adj\left(6A^{10}-3I\right)^{t}=\begin{pmatrix}0&0&-9\\0&-9&0\\-9&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\left(6A^{10}-3I\right)^{-1}=\frac{1}{(-27)}\cdot\begin{pmatrix}0&0&-9\\0&-9&0\\-9&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$X=\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{3}\\0&\frac{1}{3}&0\\\frac{1}{3}&0&0\end{pmatrix}$$

B.-Enuncia el teorema de Rouché-Fröbenius.
Sea **AX** = **B** un sistema de ecuaciones lineales, escrito en forma matricial con **m** ecuaciones y **n** incógnitas. Contesta razonadamente las siguientes preguntas:
a) Si **n > m** ¿puede el sistema ser compatible determinado?
b) Si **n = m** y $|A|\neq 0$ ¿Cuál es el rango de la matriz **A/B**?, Clasifica el sistema en este caso

<u>Teorema de Rouche-Fröbenius</u>
Un sistema de ecuaciones lineales, **S**, es compatible sí, y solo sí, el rango de la matriz de los coeficientes, **A**, es igual al rango de la matriz ampliada **A/B**; es decir:
S es compatible $\Leftrightarrow$ **rang (A) = rang (A/B)**

a) Si **n > m**, o sea mas incógnitas que ecuaciones, el sistema puede ser **incompatible** siempre que $rang(A)\neq rang(A/B)$ siendo **rang (A) < rang (A/B)** o **compatible indeterminado** si **rang (A) = rang (A/B)**

b) En este caso el sistema es **compatible determinado** ya que
rang (A) = rang (A/B) = Número de incógnitas

CUARTO BLOQUE

A. Dadas los planos $\pi_1 \equiv x+y-z=1, \pi_2 \equiv 2x+2z=0 \ y \ \pi_3 \equiv x+3y+kz=3, donde \ k \in \Re$

a) Analiza su posición relativa en función del parámetro $k \in \Re$

b) En el caso en que los tres planos se cortan en una recta, calcula las ecuaciones paramétricas de ella

$$\pi_1 \equiv x+y-z=1, \pi_2 \equiv 2x+2z=0 \ y \ \pi_3 \equiv x+3y+kz=3, donde \ k \in \Re$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & k \end{vmatrix} = 2-6-6-2k = -10-2k \Rightarrow Si \ A=0 \Rightarrow -10-2k=0 \Rightarrow 2k=-10 \Rightarrow k=-5$$

$$\forall k \in \Re - \{2\} \Rightarrow A \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Deter min ado} \Rightarrow$$
$$\text{Los tres planos se cor tan en un punto}$$

$$Si \ k=2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -5 & 3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{La última es combinación lineal de las dos primeras}$$

$$\text{Sistema Compatible In det er min ado} \Rightarrow \text{Infinitas soluciones} \Rightarrow \text{Se cor tan los tres en una recta } r \Rightarrow$$

$$-2y+4z=-2 \Rightarrow y-2z=1 \Rightarrow y=2z+1 \Rightarrow x+2z+1-z=1 \Rightarrow x+z=0 \Rightarrow x=-z \Rightarrow$$

$$r \equiv \begin{cases} x=-\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

B. Encuentra el valor del parámetro $a \in \Re$ sabiendo que la proyección del punto **P(a , 2a , 3a)** sobre el plano $\pi \equiv 2x+y-z=12$ es **P'(8 , 13 , 17)**

El vector **PP'** es paralelo al vector director del plano por ello es igual o proporcional

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (2\ ,1\ ,-1) \\ \overrightarrow{PP'} = (8\ ,13\ ,17) - (a\ ,2a\ ,3a) = (8-a\ ,13-2a\ ,17-3a) \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{8-a} = \frac{1}{13-2a} = \frac{-1}{17-3a}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2}{8-a} = \dfrac{1}{13-2a} \Rightarrow 26-4a = 8-a \Rightarrow 18 = 3a \Rightarrow a=6 \\ \dfrac{2}{8-a} = \dfrac{-1}{17-3a} \Rightarrow 34-6a = -8+a \Rightarrow 42 = 7a \Rightarrow a=6 \end{cases} \Rightarrow a=6$$