

PRIMER BLOQUE

A. Un depósito cilíndrico construido sin la tapa superior tiene una capacidad de $27\pi \text{ m}^3$.

Determina cuanto miden el radio de su base y su altura sabiendo que se ha construido de forma que su superficie sea mínima

Sea el radio de la base **R** y la altura **H**

$$\begin{cases} 27\pi = \pi R^2 H \Rightarrow H = \frac{27\pi}{\pi R^2} = \frac{27}{R^2} \Rightarrow S = \pi R^2 + 2\pi R \cdot \frac{27}{R^2} = \pi R^2 + \frac{54\pi}{R} = \frac{\pi R^3 + 54\pi}{R} = \pi \frac{R^3 + 54}{R} \Rightarrow \\ S = \pi R^2 + 2\pi RH \end{cases}$$

$$S' = \frac{dS}{dR} = \pi \frac{3R^2 R - (R^3 + 54)}{R^2} = \pi \frac{3R^3 - R^3 - 54}{R^2} = \pi \frac{2R^3 - 54}{R^2} = 2\pi \frac{R^3 - 27}{R^2} \Rightarrow S' = 0 \Rightarrow 2\pi \frac{R^3 - 27}{R^2} = 0 \Rightarrow$$

$$R^3 - 27 = 0 \Rightarrow R^3 = 27 \Rightarrow R = \sqrt[3]{27} = 3 \Rightarrow$$

$$S'' = \frac{d^2 S}{dR^2} = 2\pi \frac{3R^2 R^2 - 2R(R^3 - 27)}{R^4} = 2\pi \frac{3R^3 - 2(R^3 - 27)}{R^3} = 2\pi \frac{R^3 + 54}{R^3} \Rightarrow$$

$$S''(3) = 2\pi \frac{3^3 + 54}{3^3} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \Rightarrow \begin{cases} R = 3 \text{ m} \\ H = \frac{27}{3^2} = 3 \text{ m} \end{cases}$$

B. Se sabe que la recta **y = 9** es una asíntota horizontal de la función $f(x) = \frac{x^2}{ax^2 - 4}$. Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Estudia si para dicho valor del parámetro tiene asíntotas verticales u oblicuas

$$y = 9 \Rightarrow y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{ax^2 - 4} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2ax} = \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{a} = 9 \Rightarrow 9a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{9}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{\frac{x^2}{9} - 4} = \frac{x^2}{\frac{x^2 - 36}{9}} = \frac{9x^2}{x^2 - 36} \Rightarrow x^2 - 36 = 0 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm\sqrt{36} \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f(-6) = \frac{9 \cdot (-6)^2}{(-6)^2 - 36} = \frac{324}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \Rightarrow \text{Asíntota vertical} \Rightarrow x = -6 \\ f(6) = \frac{9 \cdot 6^2}{6^2 - 36} = \frac{324}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \Rightarrow \text{Asíntota vertical} \Rightarrow x = 6 \end{cases}$$

Asíntota oblicua

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{9x^2}{x^2 - 36}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2}{x^3 - 36x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x}{x^2 - 36} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9}{2x} = \frac{9}{\infty} = 0 \Rightarrow$$

No existe asíntota oblicua cuando $x \rightarrow \infty$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{9x^2}{x^2 - 36}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x^2}{x^3 - 36x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x}{x^2 - 36} = \frac{-\infty}{\infty} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9}{2x} = \frac{9}{-\infty} = 0 \Rightarrow$$

No existe asíntota oblicua cuando $x \rightarrow -\infty$

SEGUNDO BLOQUE

A. Calcula las integrales: a) $\int \operatorname{tg}(x) dx$ b) $\int [1 + \operatorname{tg}^2(x)] dx$ c) $\int \operatorname{arc\,tg}(x) dx$

a)

$$\int \operatorname{tg}(x) dx = \int \frac{(-1)}{t} dt = -\int \frac{dt}{t} = -\ln t = -\ln [\cos(x)] + K$$

$$\cos(x) = t \Rightarrow -\operatorname{sen}(x) dx = dt \Rightarrow \operatorname{sen}(x) dx = -dt$$

b)

$$1 + \operatorname{tg}^2(x) = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\int [1 + \operatorname{tg}^2(x)] dx = \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \operatorname{tg}(x) + K$$

c)

$$I = \int \operatorname{arc\,tg}(x) dx = x \cdot \operatorname{arc\,tg}(x) - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = x \operatorname{arc\,tg}(x) - \int \frac{1}{t} \frac{dt}{2} = x \operatorname{arc\,tg}(x) - \frac{1}{2} \cdot \ln t$$

$$\text{Por partes} \Rightarrow \begin{cases} u = \operatorname{arc\,tg}(x) \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2} dx \\ dx = dv \Rightarrow v = \int dx = x \end{cases} \quad 1+x^2 = t \Rightarrow 2x dx = dt \Rightarrow x dx = \frac{dt}{2}$$

$$I = x \operatorname{arc\,tg}(x) - \ln(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = x \operatorname{arc\,tg}(x) - \ln \sqrt{1+x^2} + K$$

B. a) Estudia la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & \text{si } x < -1 \\ 1 - x^2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

b) Determina el área encerrada por la gráfica de la función **f(x)** y el eje de abscisas

a)

Continuidad

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 3 = 1 - 4 + 3 = 0 \\ f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1 - (-1)^2 = 1 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0 \Rightarrow \text{Continua en } x = -1$$

Derivabilidad

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x < -1 \\ -2x & \text{si } x > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = 2 \cdot (-1) + 4 = -2 + 4 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = -2 \cdot (-1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = 2 \Rightarrow$$

Derivable en $x = -1$

b)

$$b) \text{ Puntos de corte con } OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-4+2}{2} = -1 \\ x = \frac{-4-2}{2} = -3 \end{cases} \\ 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Continuación del Problema B del Segundo Bloque

$$\begin{cases} f(-2) = x^2 + 4x + 3 = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 3 = 4 - 8 + 3 \Rightarrow \text{Negativo} \\ f(0) = 1 - 0^2 = 1 \Rightarrow \text{Positivo} \end{cases}$$

$$A = \left[\int_{-3}^{-1} (x^2 + 4x + 3) dx \right] + \left[\int_{-1}^1 (1 - x^2) dx \right] = \int_{-3}^{-1} (-x^2 - 4x - 3) dx + [x]_{-1}^1 - \frac{1}{3} [x^3]_{-1}^1$$

$$A = -\frac{1}{3} [x^3]_{-3}^{-1} - 4 \cdot \frac{1}{2} [x^2]_{-3}^{-1} - 3 [x]_{-3}^{-1} + [1 - (-1)] - \frac{1}{3} [1^3 - (-1)^3] =$$

$$A = -\frac{1}{3} [(-1)^3 - (-3)^3] - 2 [(-1)^2 - (-3)^2] - 3 [(-1) - (-3)] + 2 - \frac{2}{3} = -\frac{26}{3} - 2 \cdot (-8) - 3 \cdot 2 + \frac{4}{3}$$

$$A = -\frac{22}{3} + 16 - 6 = 10 - \frac{22}{3} = \frac{8}{3} u^2$$

TERCER BLOQUE

A. a) Sean **A**, **B** y **X** matrices cuadradas de tamaño **n**. Despeja **X** de la ecuación **X · A = 2X + B²**

b) Calcula la matriz **X** siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

a)

$$XA - 2X = B^2 \Rightarrow X(A - 2I) = B^2 \Rightarrow X(A - 2I)(A - 2I)^{-1} = B^2(A - 2I)^{-1} \Rightarrow XI = B^2(A - 2I)^{-1} \Rightarrow X = B^2(A - 2I)^{-1}$$

b) Existirá solución de **X** si existe una matriz inversa de **A - 2I**, siendo **I** la matriz identidad de orden **3**, y este carácter inverso solo se dará si el determinante de **A - 2I** no es nulo

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$|A - 2I| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 1 = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } (A - 2I)^{-1} \Rightarrow (A - 2I)^{-1} = \frac{1}{|A - 2I|} \cdot [\text{adj}(A - 2I)]^t \Rightarrow$$

$$(A - 2I)^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj}(A - 2I)^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A - 2I)^{-1} = \frac{1}{(-2)} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(-2)} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \frac{1}{(-2)} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 12 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(-2)} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 24 & 4 \\ 0 & 32 & 0 \\ 16 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -12 & -2 \\ 0 & -16 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

B. a) Clasifica, en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$, el sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 2 \\ 5x + 3y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + \lambda z = 1 \end{cases}$$

b) Resuélvelo para $\lambda = 0$, si es posible.

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = 3\lambda^2 + 9 - 10 + 9 - 6\lambda - 5\lambda = 3\lambda^2 - 11\lambda + 8 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow 3\lambda^2 - 11\lambda + 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = (-11)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8 = 121 - 96 = 25 \geq 0 \Rightarrow \lambda = \frac{11 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 3} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{11+5}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \\ \lambda = \frac{11-5}{6} = \frac{6}{6} = 1 \end{cases}$$

$\forall m \in \mathbb{R} - \left\{1, \frac{8}{3}\right\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$

Si $\lambda = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 8 & -10 \\ 0 & -1 & 4 & -5 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 8 & -10 \\ 0 & 2 & -8 & 10 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{La tercera ecuación es}$$

combinación lineal de las otras dos $\Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$

a) Continuación

Si $\lambda = \frac{8}{3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{8}{3} & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & \frac{8}{3} & 1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 3 & -3 & 6 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 9 & 6 & 8 & 3 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 3 & -3 & 6 \\ -40 & -24 & -24 & 0 \\ -72 & -48 & -64 & -24 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & -9 & -39 & 30 \\ 0 & -21 & -91 & 30 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & 13 & -10 \\ 0 & -21 & -91 & 30 \end{array} \right) \equiv$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & 13 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -40 \end{array} \right) \Rightarrow 0z = -40 \Rightarrow z = -\frac{40}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b)

Si $\lambda = 0 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -15 & -10 & 0 & -5 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 9 & -5 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & -3 \end{array} \right) \Rightarrow 8z = -3 \Rightarrow z = -\frac{3}{8} \Rightarrow$$

$$y + \frac{3}{8} = 2 \Rightarrow y = -\frac{3}{8} + 2 = \frac{13}{8} \Rightarrow 5x + 3 \cdot \left(\frac{13}{8}\right) + 3 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) = 0 \Rightarrow 5x + \frac{39}{8} - \frac{9}{8} = 0 \Rightarrow 5x = -\frac{30}{8} \Rightarrow$$

$$x = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = \left(-\frac{3}{4}, \frac{13}{8}, -\frac{3}{8}\right)$$

CUARTO BLOQUE

A. Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y razona tus respuestas.

1.- Dados un plano π y un punto P que no está contenido en π , existe un único plano perpendicular a π que pasa por P

2.- Dados una recta r y un punto P que no está contenido en la recta r , existe un único plano perpendicular a r que pasa por P

1.- Para que el plano π' sea perpendicular π tendremos que hallar una recta s perpendicular al plano π , dicha recta determina un haz de planos perpendiculares a π , por lo tanto la afirmación es **falsa** ya que son infinitos los planos perpendiculares

2.- La afirmación es **verdadera** ya que la recta t perpendicular a r trazada desde P , nos determina un solo plano π' que contiene a las dos rectas

B. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 1 - t \end{cases}$ y $r' \equiv \begin{cases} x = 2 + s \\ y = s \\ z = a + s \end{cases}$, con $s, t \in \mathbb{R}$

a) Encuentra un valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que las rectas r y r' estén contenidas en un mismo plano. Halla la ecuación general de dicho plano

b) Para $a = 0$, calcula unas ecuaciones paramétricas de un plano π que contenga la recta r y unas ecuaciones paramétricas de otro plano π' que contenga a la recta r' de modo que π y π' sean paralelos

a) Para que las rectas determinen un plano o son paralelas o se cortan en un punto. De ser paralelas sus vectores directores son iguales o proporcionales, de no ser así se cortarán en un punto.

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (1, -1, 1) \\ \vec{v}_{r'} = (1, 1, 1) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{-1}{1} \Rightarrow \text{No pueden ser paralelas} \Rightarrow \text{Se cortan en un punto } P$$

$$\begin{cases} t = 2 + s \\ -t = s \\ 1 - t = a + s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t - s = 2 \\ t + s = 0 \\ t + s = 1 - a \end{cases} \Rightarrow 1 - a = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow 2t = 2 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow P \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 - 1 \end{cases} \Rightarrow P(1, -1, 0)$$

Para hallar la ecuación del plano α utilizaremos los vectores directores de las rectas r y r' y el vector formado por P y G , siendo este el punto genérico del plano que se quiere hallar.

Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector $\vec{PG}$ es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (1, -1, 1) \\ \vec{v}_{r'} = (1, 1, 1) \\ \vec{PG} = (x, y, z) - (1, -1, 0) = (x-1, y+1, z) \end{cases} \Rightarrow \alpha \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-(x-1) + (y+1) + z + z - (x-1) - (y+1) = 0 \Rightarrow -2(x-1) + 2z = 0 \Rightarrow (x-1) - z = 0 \Rightarrow \alpha \equiv x - z - 1 = 0$$

Continuación del Problema B del Cuarto Bloque

Los vectores directores de las rectas son comunes a los dos planos diferenciándose en el punto que uno, el del plano π pertenecerá a la recta r , le llamaremos R y tomaremos el indicado en su ecuación, y el que esta contenido en π' pertenecerá a r' y lo denominaremos R' tomado de la ecuación de dicha recta.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, -1, 1) \\ \vec{v}_{r'} = (1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R(1, 0, 1) \Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = -\lambda + \mu \\ z = 1 + \lambda + \mu \end{cases} \\ R'(2, 0, 0) \Rightarrow \pi' \equiv \begin{cases} x = 2 + s + t \\ y = -s + t \\ z = s + t \end{cases} \end{array} \right.$$