PRIMER BLOQUE

A. Encuentra el punto de la recta x + y = 4, que cumpla que la suma de los cuadrados de sus coordenadas sea mínimo.

$$\begin{cases} x+y=4 \Rightarrow y=4-x \\ S=x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow S=x^2+(4-x)^2=x^2+16-8x+x^2=2x^2-8x+16 \Rightarrow S'=\frac{dS}{dx}=4x-8 \Rightarrow$$

$$S'=0 \Rightarrow 4x-8=0 \Rightarrow 4x=8 \Rightarrow x=\frac{8}{4}=2 \Rightarrow S''=\frac{d^2S}{dx^2}=4>0 \Rightarrow Mínimo \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4-2=2 \end{cases}$$

B. Enuncia el teorema de Bolzano. Como aplicación de este teorema demuestra que las gráficas de las funciones $f(x)=e^{x^2}$ y $g(x)=2\cos(x^2)$ se cortan, al menos, en un punto

Teorema de Bolzano

Si **h(x)** es continua en el intervalo **[a , b]**, y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo **[sign h(a) $\neq$ sign h(b)]**, entonces existe, al menos, un punto $c \in (a\ ,b)$ tal que **h(c) = 0**

La función $h(x)=f(x)-g(x)=e^{x^2}-2\cos(x^2)$ es continua y derivable en toda la recta real

y para el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}\ ,0\right]$ **tenemos** $\begin{cases} h\left(-\frac{\pi}{2}\right)=e^{\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2}-2\cos\left[\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2\right]=e^{\frac{\pi^2}{4}}-2\cdot\cos\left(\frac{\pi^2}{4}\right) \\ h(0)=e^{(0)^2}-2\cos(0)^2=e^0-2\cdot\cos 0 \end{cases}$

$\begin{cases} h\left(-\frac{\pi}{2}\right)=13'35418517>0 \\ h(0)=-1<0 \end{cases}$ toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo

[sign h($\frac{\pi}{2}$) $\neq$ sign h(0)] , entonces existe, al menos, un punto $c \in \left(-\frac{\pi}{2}\ ,0\right)$ tal que **h(c) = 0 y por ello**

$$h(c)=f(c)-g(c)=e^{c^2}-2\cos(c^2)=0 \Rightarrow e^{c^2}=2\cos(c^2)$$

SEGUNDO BLOQUE

A. Encuentra una primitiva de la función $\frac{x+36}{4+9x^2}$.

$$F(x)=\int\frac{x+36}{4+9x^2}\,dx=\int\frac{x}{4+9x^2}\,dx+\int\frac{36}{4+9x^2}\,dx=\int\frac{1}{t}\,\frac{dx}{8}+\int\frac{36}{4\left(1+\frac{9x^2}{4}\right)}\,dx=\frac{1}{8}\cdot\ln x+\int\frac{9}{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2}\,dx$$

$$4+9x^2=t \Rightarrow 18x\,dx=dt \Rightarrow x\,dx=\frac{dt}{8}$$

$$F(x)=\frac{1}{8}\cdot\ln x+\int\frac{9}{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2}\,dx=\frac{1}{8}\cdot\ln x+\int\frac{9}{1+u^2}\cdot\frac{2}{3}du=\ln x^{\frac{1}{8}}+6\int\frac{du}{1+u^2}=\ln x^{\frac{1}{8}}+6\cdot arc\ tg\ u$$

$$\frac{3}{2}x=u \Rightarrow \frac{3}{2}dx=du \Rightarrow dx=\frac{2}{3}du$$

$$F(x)=\ln\sqrt[8]{x}+6\cdot arc\ tg\left(\frac{3}{2}x\right)+K$$

B. Calcula la integral definida $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ (puede ayudarte hacer un cambio de variable)

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{x}+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx=\int_1^2 \frac{t+e^t}{t}\,2t\,dt=2\int_1^2\left(t+e^t\right)dt=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[t^2\right]_1^2+2\cdot\left[e^t\right]_1^2=\left(2^2-1^2\right)+2\cdot\left(e^2-e^1\right)=3+2\cdot\left(e^2-e\right)$$

$$x=t^2\Rightarrow dx=2t\,dt\Rightarrow t=\sqrt{x}\Rightarrow\begin{cases}x=4\Rightarrow t=2\\ x=1\Rightarrow t=1\end{cases}$$

TERCER BLOQUE

A. a) Sean **A**, **B** y **X** matrices cuadradas de tamaño n. Despeja **X** de la ecuación **A.X.B = B²**

b) Calcula la matriz **X** siendo $A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&3\\1&0&1\end{pmatrix}$

a)

$$AXBB^{-1}=B^2B^{-1}\Rightarrow AXI=B\Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B\Rightarrow IX=A^{-1}B\Rightarrow X=A^{-1}B$$

b) Veremos, inicialmente, que la matriz **A** tenga inversa porque si no la tiene no podríamos solucionar la ecuación, para tenerla su determinante no puede ser nulo

$$|A|=\begin{vmatrix}0&0&-1\\0&1&-1\\1&-1&0\end{vmatrix}=1\neq 0\Rightarrow Existe\ A^{-1}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\left(adj\ A^t\right)\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$adj\ A^t=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-1&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}-1&1&1\\-1&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-1&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$X=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-1&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&3\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&2\\-1&1&1\\-1&0&-2\end{pmatrix}$$

B.- a) Calcula en función del parámetro $a\in\Re$, las soluciones de la ecuación:

$$\begin{vmatrix}x&x-1&1\\0&1&2\\-1&2&0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&-1&x&1\\-1&-1&0&0\\1&0&x&1\\x&0&a&x\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix}x&x-1&1\\-2x&-2x+3&0\\-1&2&0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&-1&x&1\\-2&0&-x&-1\\1&0&x&1\\x&0&a&x\end{vmatrix}=0\Rightarrow 1\cdot\begin{vmatrix}-2x&-2x+3\\-1&2\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}-2&-x&-1\\1&x&1\\x&a&x\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix}-2x&-2x+3\\-1&2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-2&-x&-1\\-1&0&0\\x&a&x\end{vmatrix}=0\begin{vmatrix}-2x&-2x+3\\-1&2\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}-x&-1\\a&x\end{vmatrix}=0\Rightarrow-4x+\left(-2x+3\right)-\left(-x^2+a\right)=0$$

Continuación del Problema B del Tercer Bloque

$$-6x+3+x^2+a=0 \Rightarrow x^2-6x+3+a=0 \Rightarrow \Delta=(-6)^2-4\cdot 1\cdot(3+a)=36-12-4a=24-4a \Rightarrow$$

$$x=\frac{6\pm 2\sqrt{6-a}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x=3+\sqrt{6-a} \\ x=3-\sqrt{6-a} \end{cases}$$

CUARTO BLOQUE

A. a) Estudia en función del parámetro $k\in\Re$ la posición relativa de los planos:

$$\pi_1 \equiv x+y-z=1 \quad y \quad \pi_2 \equiv x+y-k^2z=k$$

b) ¿Existe algún valor de k para el que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares?

a) Los planos pueden ser paralelos, coincidentes o se cortan según una recta. Para que sean paralelos sus vectores directores son iguales o proporcionales y si son coincidentes lo es, también, el valor independiente

$$\begin{cases} v_{\pi_1}=(1,1,1) \\ v_{\pi_2}=(1,1,k^2) \end{cases} \Rightarrow Paralelos \Rightarrow \frac{1}{1}=\frac{1}{1}=\frac{1}{k^2} \Rightarrow k^2=1 \Rightarrow k=\pm\sqrt{1}$$

$$Coincidentes \Rightarrow \frac{1}{1}=\frac{1}{1}=\frac{1}{1}=\frac{1}{k} \Rightarrow k=1 \Rightarrow$$

$$Son\ paralelos\ cuando\ k=-1$$

$$Son\ coincidentes\ cuando\ k=1$$

$$\forall k\in\Re-(-1,1) \Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ según\ una\ recta$$

b) para que los planos sean perpendiculares se necesita que sus vectores directores lo sean y, por ello, su producto escalar nulo

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{\pi_1}}=(1,1,1) \\ \overrightarrow{v_{\pi_2}}=(1,1,k^2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi_1}} \perp \overrightarrow{v_{\pi_2}} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi_1}}\cdot\overrightarrow{v_{\pi_2}}=0 \Rightarrow (1,1,1)\cdot(1,1,k^2)=0 \Rightarrow 1+1+k^2=0 \Rightarrow k^2=-2 \Rightarrow$$

$$k=\pm\sqrt{-2} \Rightarrow Solución\ imaginaria \Rightarrow No\ existe\ solución\ en\ el\ campo\ de\ los\ números\ reales \Rightarrow$$

$$No\ existe\ ningún\ valor\ de\ k\ que\ haga\ que\ los\ planos\ sean\ perpendiculares$$

B. a) Halla la ecuación general de un plano π que contenga a la recta $r\equiv\begin{cases} x+z=1 \\ y+z=0 \end{cases}$ y pase por el origen de coordenadas

b) Halla las ecuaciones paramétricas de una recta **r'** contenida en dicho plano, que sea perpendicular a **r** y que pase por el punto **P(1 , 0 , 0)**

a) Para hallar el plano π tomaremos el vector director de la recta **r**, el vector formado por un punto **R** cualquiera de la recta r (tomaremos el indicado en su ecuación) y por el punto **O** y el vector formado por **O** y **G**, siendo este punto el generador del plano. Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector **OG** es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano

$$\begin{cases} x=1-z \\ y=-z \end{cases} \Rightarrow r\equiv\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(-1,-1,1) \\ R(1,0,0) \end{cases}$$

Continuación del problema B del Bloque 4

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (-1\ ,-1\ ,1) \\ \overrightarrow{OR} = (1\ ,0\ ,0) - (0\ ,0\ ,0) = (1\ ,0\ ,0) \\ \overrightarrow{OG} = (x\ ,y\ ,z) - (0\ ,0\ ,0) = (x\ ,y\ ,z) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv y + z = 0$$

b) La recta **r’** buscada esta situada en el mismo plano y es perpendicular a la recta **r** y al vector director del plano π por ello el producto vectorial de ambos es el vector director buscado

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (-1\ ,-1\ ,1) \\ \overrightarrow{v_\pi} = (0\ ,1\ ,1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_{r'}} = \overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_\pi} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{k} - \vec{i} + \vec{j} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{v_{r'}} = (-2\ ,1\ ,-1) \Rightarrow$$

$$r' = \begin{cases} x = 1 - 2\mu \\ y = \mu \\ z = -\mu \end{cases}$$