PRIMER BLOQUE

A. Encuentra el punto de la gráfica $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ en el que la pendiente de la recta tangente sea mínima.

$$m = f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow m' = f''(x) = 6x + 2 = 2 \cdot (3x+1) \Rightarrow m' = 0 \Rightarrow 2 \cdot (3x+1) = 0 \Rightarrow 3x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$3x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \Rightarrow m'' = f'''(x) = 6 > 0 \Rightarrow Mínimo \Rightarrow$$

$$x = -\frac{1}{3} \Rightarrow f(x) = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = -\frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{-1+3-9+27}{27} = \frac{20}{27} \Rightarrow$$

$$m = f'(x) = 3\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = \frac{3}{9} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{1-2+3}{3} = \frac{2}{3}$$

B. Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{ln\,(x)}$, donde **ln (x)** es el logaritmo neperiano de **x**

a) Su dominio y sus asíntotas
b) Razona que la función es decreciente en su dominio

a)

$Dom(f) = \forall x \in \Re \,/\, x > 0$

Asíntota vertical en $x = 0$

Asíntotas horizontales

$$y = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{ln\,x} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow Existe\ asíntota\ horizontal,\ y = 0, cuando\ x \to \infty$$

Asíntotas oblicuas

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{ln\,x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x\,ln\,x} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow No\ existe\ asíntota\ oblicua\ cuando\ x \to \infty$$

b)

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{ln^2(x)} = -\frac{1}{x\,ln\,x} \Rightarrow Creciente \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \begin{cases} -1 < 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \,/\, x > 0 \\ x > 0 \\ ln\,x > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \,/\, x > 1 \end{cases}$$

	0	1 $\quad -\infty$
1 < 0	**(-)**	**(-)**
x > 0	**(-)**	**(+)**
ln x > 1	**(-)**	**(+)**
Solución	**(-)**	**(-)**

Es decreciente para el Dominio de la función $\Rightarrow \forall x \in \Re \,/\, x > 0$

SEGUNDO BLOQUE

A. Calcula la integral indefinida $\int \left(\frac{2x^3 - 9x^2 + 9x + 6}{x^2 - 5x + 6} \right) dx$

$$\begin{array}{rl} 2x^3 - 9x^2 + 9x + 6 & \big|\,\underline{x^2 - 5x + 6} \\ \underline{-2x^3 + 10x^2 - 12x} & \quad 2x + 1 \\ x^2 - 3x + 6 & \\ \underline{-x^2 + 5x - 6} & \\ 2x & \end{array}$$

$$\frac{2x^3 - 9x^2 + 9x + 6}{x^2 - 5x + 6} = 2x + 1 + \frac{2x}{x^2 - 5x + 6} \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 \geq 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5+1}{2} = 3 \\ x = \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) \Rightarrow$$

$$\frac{2x}{x^2 - 5x + 6} = \frac{2x}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3) + B(x-2)}{(x-2)(x-3)} \Rightarrow A(x-3) + B(x-2) = 2x \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 3 \Rightarrow A(3-3) + B(3-2) = 2 \cdot 3 \Rightarrow B = 6 \\ x = 2 \Rightarrow A(2-3) + B(2-2) = 2 \cdot 2 \Rightarrow -A = 4 \Rightarrow A = -4 \end{cases} \Rightarrow \frac{2x}{x^2 - 5x + 6} = \frac{-4}{x-2} + \frac{6}{x-3}$$

$$I = \int \left(\frac{2x^3 - 9x^2 + 9x + 6}{x^2 - 5x + 6} \right) dx = \int (2x+1)\, dx - 4\int \frac{dx}{x-2} + 6\int \frac{dx}{x-3} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 + x - 4\int \frac{dt}{t} + 6\int \frac{du}{u}$$

$$\begin{cases} x - 2 = t \Rightarrow dx = dt \\ x - 3 = u \Rightarrow dx = du \end{cases}$$

$$I = x^2 + x - 4 \ln t + 6 \ln u = x^2 + x + \ln \frac{u^6}{t^4} = x^2 + x + \ln \frac{(x-3)^6}{(x-2)^4} + K$$

B. Halla una primitiva **F(x)** de la función $f(x)=8x^3+2x$, que cumpla que $F(x)\geq 0$ para todo $x\in\Re$, y de forma que el área comprendida entre las gráficas de **F(x)**, el eje de abcisas y las rectas **x = 0** y **x = 1** sea $\frac{41}{15}$

$$F(x)=\int\left(8x^3+2x\right)dx=8\cdot\frac{1}{4}\cdot x^4+2\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2=2x^4+x^2+K$$

$$\frac{41}{15}=\int_0^1\left(2x^4+x^2+K\right)dx\Rightarrow\frac{41}{15}=2\cdot\frac{1}{5}\cdot\left[x^5\right]_0^1+\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^1+K\cdot\left[x\right]_0^1\Rightarrow$$

$$\frac{41}{15}=\frac{2}{5}\cdot\left(1^5-0^5\right)+\frac{1}{3}\cdot\left(1^3-0^3\right)+K\cdot(1-0)\Rightarrow\frac{41}{15}=\frac{2}{5}+\frac{1}{3}+K\Rightarrow K=\frac{41}{15}-\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{41-6-5}{15}=\frac{30}{15}=2\Rightarrow$$

$$F(x)=2x^4+x^2+2$$

TERCER BLOQUE

A. Determina en función del parámetro $m\in\Re$, el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix}m&2&-1&m-1\\2&4&m&m+2\\3&6&-3&0\end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}m&2&-1&m-1\\2&4&m&m+2\\3&6&-3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m&2&-1&m-1\\2-2m&0&m+2&m+2-2m+2\\3-3m&0&0&-3m+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m&2&-1&m-1\\2-2m&0&m+2&-m+4\\3-3m&0&0&-3m+3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}3-3m=0\Rightarrow 3=3m\Rightarrow m=1\\-3m+3=0\Rightarrow 3=3m\Rightarrow m=1\end{array}\right.\Rightarrow m=1\Rightarrow rang(A)=2$$

$$\forall m\in\Re-\{1\}\Rightarrow rang(A)=3 \qquad Si\ m=1\Rightarrow rang(A)=2$$

B.-Enuncia el teorema de Rouché-Fröbenius. Sean **A** una matriz **3 x 3**, **B** una matriz columna no nula de tamaño **3 x 1**, **O** la matriz nula de tamaño **3 x 1**, y consideremos los sistemas expresados en forma matricial **A . X = B** y **A . X = O**

a) Sabiendo que **A . X = B** es incompatible, clasifica el sistema **A . X = O**

b) Sabiendo que la matriz **A** tiene inversa, clasifica el sistema **A . X = B**

Teorema de Rouche-Fröbenius

Un sistema de ecuaciones lineales, **S**, es compatible sí, y solo sí, el rango de la matriz de los coeficientes, **A**, es igual al rango de la matriz ampliada **A/B**; es decir: **S es compatible** $\Leftrightarrow$ **rang (A) = rang (A/B)**

a) Si el sistema **A . X = B** es incompatible significa que **rang (A) = rang (A/B)** o que **A** no tiene inversa, como el sistema es homogéneo y el **rang(A)** es, como mínimo, **dos** por lo tanto el sistema es Compatible Indeterminado.

b) Si la matriz es tiene inversa es que su determinante es distinto de cero y, por ello, su rango es tres igual a l numero de incógnitas por lo tanto el sistema es Compatible Determinado de solución **X = A^{-1} . B**

CUARTO BLOQUE

A. Dado los puntos **A(1 , 0 , 1)**, **B(2 , 1 , 0)**, **C(1 , 1 , a)** con $a \in \Re$

a) ¿Existe algún valor de **a** para el que los tres puntos estén alineados?

b) ¿Existe algún valor de **a** para que el plano que contiene a los tres puntos **A**, **B** y **C** sea paralelo al plano $\pi \equiv 4x - 6y - 2z = 7$?

a) Si los tres puntos están alineados los vectores **AB** y **AC** son iguales o proporcionales

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2,1,0) - (1,0,1) = (1,1,-1) \\ \overrightarrow{AC} = (1,1,a) - (1,0,1) = (0,1,a-1) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{0} \neq \frac{1}{1} \Rightarrow \textit{No pueden estar alineados para ningún valor de a}$$

b) Calculemos un plano α que pase por A, B y C y después comprobaremos si es paralelo al plano π analizando si sus vectores directores son guales o proporcionales

Para hallar el plano α consideramos los vectores **AB** y **AC** y el vector **AG,** siendo G el punto generador del plano. Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector **AG** es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1,1,-1) \\ \overrightarrow{AC} = (1,1,a) - (1,0,1) = (0,1,a-1) \\ \overrightarrow{AG} = (x,y,z) - (1,0,1) = (x-1,y,z-1) \end{cases} \Rightarrow \alpha \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(a-1)(x-1) + (z-1) + (x-1) - (a-1)y = 0 \Rightarrow a(x-1) - (a-1)y + z - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = ax - (a-1)y + z - 1 - a = 0$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\alpha} = (a, a-1, 1) \\ \overrightarrow{v_\pi} = (4, -6, 2) \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{4} = \frac{a-1}{-6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2 \\ \frac{a-1}{-6} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2a - 2 = -6 \Rightarrow 2a = -4 \Rightarrow a = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

No hay ningún valor de a que nos de un plano que pueda ser paralelo a π

B. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x - 2y = 1 \\ y - z = -1 \end{cases}$ y $r' \equiv \begin{cases} x = a - s \\ y = a + s, \quad con\ s \in \Re \\ z = s \end{cases}$

a) Estudia en función del parámetro $a \in \Re$ su posición relativa

b) Para el valor del parámetro **a** que hace que **r** y **r'** se corten en un punto, halla el punto **P** de intersección entre ambas rectas, y las ecuaciones paramétricas de una recta perpendicular a **r** y **r'** que pase por dicho punto **P**

a) Analizaremos si las rectas tienen un punto común, de tenerlo estudiaremos si los vectores directores son iguales o proporcionales, si este caso se da, las rectas son coincidentes, de no darse este último supuesto las rectas se cortan en un punto, son secantes.
Si no tienen punto común, y hay igualdad o proporcionalidad entre los vectores directores las rectas son paralelas, de no haberlo las rectas se cruzan en el espacio.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (2, 1, 1) \\ \overrightarrow{v_{r'}} = (-1, 1, 1) \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{-1} \neq \frac{1}{1} \Rightarrow No\ son\ paralelas\ ni\ coincidentes$$

$$\begin{cases} x = 2y + 1 \\ z = y + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \\ r' \equiv \begin{cases} x = a - s \\ y = a + s \\ z = s \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2\lambda = a - s \\ \lambda = a + s \\ 1 + \lambda = s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda + s = -1 + a \\ \lambda - s = a \\ \lambda - s = -1 \end{cases} \Rightarrow a = -1 \Rightarrow$$

$$\forall a \in \Re - \{-1\} \Rightarrow Sistema\ Incompatible \Rightarrow Las\ rectas\ se\ cruzan\ en\ el\ espacio$$

$$Si\ a = -1 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Determinado \Rightarrow Las\ rectas\ se\ cortan\ en\ el\ punto\ P$$

b) Hallado el punto **P** de corte, para hallar la recta **s** perpendicular a los dos hallaremos el producto vectorial de ambos vectores directores

$$\begin{cases} 2\lambda + s = -1 + (-1) \\ \lambda - s = -1 \end{cases} \Rightarrow 3\lambda = -3 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow -1 - s = -1 \Rightarrow s = 0 \Rightarrow P \begin{cases} x = 1 + 2 \cdot (-1) \\ y = -1 \\ z = 1 + (-1) \end{cases} \Rightarrow P(-1, -1, 0)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (2, 1, 1) \\ \overrightarrow{v_{r'}} = (-1, 1, 1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_{r'}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} + \vec{k} - \vec{i} - 2\vec{j} = -3\vec{j} + 3\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{v_s} = (0, -3, 3) \equiv (0, -1, 1)$$

$$s = \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 - t \\ z = t \end{cases}$$