Propuesta A

1A.- Dada la función $f(x) = 3x^3 - 36x + 2$ se pide:

a) Determinar las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos **(1 punto)**
b) Enuncia el teorema del valor medio de Lagrange. Analiza si es posible aplicarlo a la función **f(x)** en el intervalo **[-2 , 2]** y, en caso afirmativo, calcula en que puntos se verifica la teoría del teorema en dicho intervalo **(1'5 puntos)**

a)

$$f'(x) = 9x^2 - 36 = 9\left(x^2 - 4\right) \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 9\left(x^2 - 4\right) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$f''(x) = 18x \Rightarrow \begin{cases} f''(-2) = 18\cdot(-2) = -36 < 0 \Rightarrow máximo \Rightarrow x = -2 \Rightarrow f(-2) = 9(-2)^2 - 36\cdot(-2) + 2 = 110 \\ f''(2) = 18\cdot 2 = 36 > 0 \Rightarrow Mínimo \Rightarrow x = 2 \Rightarrow f(2) = 9\cdot 2^2 - 36\cdot 2 + 2 = -34 \end{cases}$$

b) **<u>Teorema de Lagrange o del valor medio</u>**

Si **f(x)** es continua en **[a , b]** y derivable en **(a , b),** entonces existe, al menos, un punto $c \in (a\ , b)$ tal que:

f(b) – f(a) = f'(c) (b – a)

Se verifica el teorema en esta función ya que es continua en **[-2 , 2]** y derivable en **(-2 , 2)**

$$\begin{cases} f(-2) = 9\cdot(-2)^2 - 36\cdot(-2) + 2 = 110 \\ f(2) = 9\cdot 2^2 - 36\cdot 2 + 2 = -34 \end{cases} \Rightarrow f(2) - f(-2) = f'(c)\cdot[2 - (-2)] \Rightarrow -34 - 110 = f'(c)\cdot(2+2) \Rightarrow$$

$$-144 = f'(c)\cdot 4 \Rightarrow f'(c) = -\frac{144}{4} = -36 \Rightarrow f'(c) = 9c^2 - 36 = -36 \Rightarrow 9c^2 = 0 \Rightarrow c = 0 \in [-2\ , 2]$$

2A.- a) Dado un número real **a > 0**, calcula el área del recinto encerrado entre la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$, el eje de abcisas y las rectas **x = a** y **x = a + 1 (1'5 puntos)**

b) Explica razonadamente que cuando a tiende a ∞, dicho área tiende a cero **(1'25 puntos)**

a)

$$A = \int_a^{a+1} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_a^{a+1} x^{-2}\,dx = \frac{1}{(-1)}\left[x^{-1}\right]_a^{a+1} = -\left(\frac{1}{a+1} - \frac{1}{a}\right) = -\left[\frac{a - (a+1)}{a\,(a+1)}\right] = \frac{a + 1 - a}{a\,(a+1)} = \frac{1}{a\,(a+1)}$$

b)

$$A = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{a\,(a+1)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

3A.- a) Clasifica en función del parámetro $k \in \Re$ el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 100y - z = 100 \\ x - 100y + 2z = 0 \\ x + 300y + kz = 200 \end{cases}$ **(1'5 puntos)**

b) Resuélvelo en el caso en que sea compatible indeterminado **(1 punto)**

$a)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 100 & -1 \\ 1 & -100 & 2 \\ 1 & 300 & k \end{vmatrix} = -100k + 200 - 300 - 100 - 600 - 100k = -800 - 200k \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow -800 - 200k = 0$$

$$-800 = 200k \Rightarrow k = -\frac{800}{200} = -4$$

$$\forall k \in \Re - \{-4\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 = \text{Número de ecuaciones} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$

$$Si\ k = -4$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 100 & -1 & 100 \\ 1 & -100 & 2 & 0 \\ 1 & 300 & -4 & 200 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 100 & -1 & 100 \\ 0 & -200 & 3 & -100 \\ 0 & 200 & -3 & 100 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 100 & -1 & 100 \\ 0 & -200 & 3 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{La tercera ecuación es combina -}$$

$$\text{ción lineal de la primera y segunda} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

$$b)\ \text{Sistema Compatible Indeterminado} \Rightarrow k = -4$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 100 & -1 & 100 \\ 0 & -200 & 3 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow -200y + 3z = -100 \Rightarrow 3z = -100 + 200y \Rightarrow z = \frac{-100 + 200y}{3} \Rightarrow$$

$$x + 100y - \frac{200y - 100}{3} = 100 \Rightarrow x + \frac{-100y}{3} + \frac{100}{3} = 100 \Rightarrow x = 100 - \frac{100}{3} + \frac{100y}{3} = \frac{200}{3} + \frac{100y}{3} \Rightarrow$$

$$\text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{200 + 100\lambda}{3}, \lambda, \frac{200\lambda - 100}{3} \right)$$

4A.- a) Comprueba que las direcciones de las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$ y $r' \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda, \lambda \in \Re \\ z = \lambda \end{cases}$, son perpendiculares **(1 punto)**

b) Halla la ecuación general de un plano π que contenga a la recta r y sea paralela a r' (**1'5 puntos)**

a) Al ser perpendiculares el producto escalar de los vectores directores es nulo

$$y = 1 - z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (0, -1, 1) \\ \overrightarrow{v_{r'}} = (2, 1, 1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_{r'}} = (0, -1, 1) \cdot (2, 1, 1) = 0 - 1 + 1 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{v_{r'}}$$

$$\text{Son perpendiculares los vectores directores}$$

Continuación del problema 4A

b) El plano pedido queda determinado por los vectores directores de las rectas y el vector formado por un punto **R** cualquiera de la recta r (tomaremos el indicado en su ecuación) y el punto **G**, genérico del plano pedido.

Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector **RG** es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano.

$R(0\ ,1\ ,0)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (0\ ,-1\ ,1) \\ \overrightarrow{v_{r'}} = (2\ ,1\ ,1) \\ PG = (x\ ,y\ ,z) - (0\ ,1\ ,0) = (x\ ,y-1\ ,z) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x + 2\,(y-1) + 2z - x = 0 \Rightarrow$$

$$-2x + 2\,(y-1) + 2z = 0 \Rightarrow x - (y-1) - z = 0 \Rightarrow \pi \equiv x - y - z + 1 = 0$$

Propuesta B

1B.- El espacio recorrido por una partícula, medido en metros, está determinado en función del tiempo $t \geq 0$, medido en segundos, por la expresión **e(t) = At^2 + B Ln (t + 1) + C**. Se pide:

a) Determinar los coeficientes **A**, **B**,**C**$\in \Re$ sabiendo que en el instante **t = 0** la partícula ha recorrido **6 m.**, la velocidad inicial para **t = 0** es de **8 m/seg** y que la aceleración cuando **t = 1 segundo** es de **2 m/seg^2** **(1'5 puntos)**

b) Para los valores obtenidos de A, B y C, calcula $\lim_{x \to \infty} \frac{e(t)}{t^2}$ **(1 punto)**

(Nota: **Ln (t + 1)** representa el logaritmo neperiano de **t + 1**. Recuerda, además, que la velocidad es la derivada primera del espacio respecto del tiempo y la aceleración la derivada segunda)

$a)$

$$\begin{cases} v(t) = e'(t) = 2At + B \cdot \dfrac{1}{t+1} \\ a(t) = e''(t) = 2A - B \cdot \dfrac{1}{(t+1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e'(0) = 6 \Rightarrow A \cdot 0^2 + B \cdot Ln\,(0+1) + C = 6 \Rightarrow C = 6 \\ v(0) = 8 \Rightarrow 2A \cdot 0 + B \cdot \dfrac{1}{0+1} = 8 \Rightarrow B = 8 \\ a(t) = 2 \Rightarrow 2A - 8 \cdot \dfrac{1}{(1+1)^2} = 2 \Rightarrow 2A - 2 = 2 \Rightarrow 2A = 4 \Rightarrow A = \dfrac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

$b)$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2t^2 + 8\,Ln\,(t+1) + 6}{t^2} = \frac{\infty}{\infty} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x \to \infty} \frac{4t + \dfrac{8}{t+1}}{2t} = \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{4t^2 + 4t + 8}{t+1}}{2t} = \lim_{x \to \infty} \frac{4t^2 + 4t + 8}{2t\,(t+1)} =$$

$$= \frac{\infty}{\infty} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x \to \infty} \frac{8t+4}{4t+2} = \frac{\infty}{\infty} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x \to \infty} \frac{8}{4} = 2$$

2.B.- Calcular la integral indefinida: $\int \frac{1}{x^3 + x^2}\,dx$ **(2'5 puntos)**

$$x^3 + x^2 = x^2(1+x) \Rightarrow \frac{1}{x^3 + x^2} = \frac{1}{x^2(1+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{1+x} = \frac{Ax(1+x) + B(1+x) + Cx^2}{x^2(1+x)} \Rightarrow$$

$$Ax(1+x) + B(1+x) + Cx^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow A \cdot 0 \cdot (1+0) + B(1+0) + C \cdot 0^2 = 1 \Rightarrow B = 1 \\ x = -1 \Rightarrow A\,(-1)[1 + (-1)] + B[1 + (-1)] + C \cdot (-1)^2 = 1 \Rightarrow C = 1 \\ x = 1 \Rightarrow A \cdot 1 \cdot (1+1) + B(1+1) + C \cdot 1^2 = 1 \Rightarrow 2A + 2B + C = 1 \end{cases}$$

$$2A + 2 + 1 = 1 \Rightarrow 2A = -2 \Rightarrow A = -1 \Rightarrow \frac{1}{x^3 + x^2} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x}$$

$$I = \int \frac{1}{x^3 + x^2}\,dx = -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1+x} = -Ln\,x + \int x^{-2}dx + \int \frac{dt}{t} = -Ln\,x + \frac{1}{(-1)} \cdot x^{-1} + Ln\,t$$

$$1 + x = t \Rightarrow dx = dt$$

$$I = -\frac{1}{x} + Ln\,\frac{t}{x} = -\frac{1}{x} + Ln\,\frac{1+x}{x} + K$$

3B.- a) Despeja **X** en la ecuación matricial **X . A = B – 2X**, donde **A**, **B** y **X** son matrices cuadradas de orden 3 **(1'25 puntos)**

b) Calcula la matriz **X** siendo $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}4&1&2\\2&2&5\\1&4&4\end{pmatrix}$ **(1'25 puntos)**

a)

$$XA+2X=B\Rightarrow X(A+2I)=B\Rightarrow X(A+2I)(A+2I)^{-1}=B(A+2I)^{-1}\Rightarrow XI=B(A+2I)^{-1}\Rightarrow$$
$$X=B(A+2I)^{-1}\Rightarrow I\ es\ la\ matriz\ identidad\ de\ orden\ 3$$

b)

$$A+2I=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&0\\0&2&1\\1&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow|A+2I|=\begin{vmatrix}3&1&0\\0&2&1\\1&0&2\end{vmatrix}=12+1$$

$$Como\ |A+2I|=13\neq 0\Rightarrow Existe\ (A+2I)^{-1}\Rightarrow(A+2I)^{-1}=\frac{1}{|A+2I|}\cdot\left[adj\ (A+2I)^t\right]\Rightarrow(A+2I)^t=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&2&0\\0&1&2\end{pmatrix}$$

$$adj\ (A+2I)^t=\begin{pmatrix}4&-2&1\\1&6&-3\\-2&1&6\end{pmatrix}\Rightarrow(A+2I)^{-1}=\frac{1}{13}\cdot\begin{pmatrix}4&-2&1\\1&6&-3\\-2&1&6\end{pmatrix}$$

$$X=B(A+2I)^{-1}=\begin{pmatrix}4&1&2\\2&2&5\\1&4&4\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{13}\cdot\begin{pmatrix}4&-2&1\\1&6&-3\\-2&1&6\end{pmatrix}=\frac{1}{13}\cdot\begin{pmatrix}13&0&13\\0&13&26\\0&26&13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}$$

4.B.- Calcula los parámetros $a,b,c\in\Re$ de la ecuación del plano $\pi\equiv ax+y+bz=c$, sabiendo que pasa por el origen de coordenadas, es perpendicular al plano de ecuación $\pi'\equiv x+2y=3$ y que contiene a la recta $r\equiv\begin{cases}x=1+\lambda\\y=1+\lambda\ ,\lambda\in\Re\\z=1+\lambda\end{cases}$ **(2'5 puntos)**

Pasando por el origen de coordenadas

$$a\cdot 0+0+b\cdot 0=0\Rightarrow c=0$$

El vector director del plano π *es perpendicular al del plano* π' *,su producto escalar es nulo*

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_\pi}=(a,1,b)\\\overrightarrow{v_{\pi'}}=(1,2,0)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{v_\pi}\perp\overrightarrow{v_{\pi'}}\Rightarrow\overrightarrow{v_\pi}\cdot\overrightarrow{v_{\pi'}}=0\Rightarrow(a,1,b)\cdot(1,2,0)=0\Rightarrow a+2+0=0\Rightarrow a=-2$$

El vector director del plano π *es perpendicular al de la recta* r *,su producto escalar es nulo*

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_\pi}=(-2,1,b)\\\overrightarrow{v_r}=(1,1,1)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{v_\pi}\perp\overrightarrow{v_r}\Rightarrow\overrightarrow{v_\pi}\cdot\overrightarrow{v_r}=0\Rightarrow(-2,1,b)\cdot(1,1,1)=0\Rightarrow-2+1+b=0\Rightarrow-1+b=0\Rightarrow b=1$$

$$Solución\Rightarrow(a,b,c)=(-2,1,0)$$