



Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado

Materia:

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.

Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Propuesta A

1 Tenemos las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Calcular la matriz $M = (3 \cdot I + A \cdot B)$, donde I es la matriz identidad de orden 3. (0.75 pts)

b) Calcular la matriz X tal que $X \cdot C = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2. (0.75 pts)

2 Hoy compré un refresco y un bocadillo por 5 euros. Ayer compré dos refrescos y tres bocadillos por 13 euros. Anteayer compré 3 refrescos y 2 bocadillos pero no recuerdo lo que me costó. Se pide:

a) Plantea un sistema de ecuaciones que responda a las condiciones del enunciado. (1.5 pts)

b) Determina el importe de la compra que realicé anteayer. (0.5 pts)

3 Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x, & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 2x, & \text{si } x > 0. \end{cases}$ Se pide:

a) Estudia su continuidad en el punto $x = 0$. (0.5 pts)

b) Determina los extremos relativos de f en el intervalo $(-4, 4)$. (1 pto)

4 La función $f(x) = ax^2 + 6x + b$ tiene un máximo en el punto $(1, 4)$. Se pide:

a) Determina el valor de "a" y de "b". (1 pto)

b) Para los valores hallados en el apartado anterior, escribe el intervalo en donde la función es decreciente. (0.5 pts)

5 En una biblioteca hay 100 personas de Albacete, 50 de Ciudad Real, 100 de Toledo y 50 de Cuenca.

a) Se sortean dos ordenadores entre todas ellas, ¿cuál es la probabilidad de que no le toque a ningún albaceteño? (puede tocarle al mismo alumno los dos ordenadores). (0.75 pts)

b) Se eligen al azar tres personas entre todas ellas para un concurso, de una en una y sin que se puedan repetir, ¿cuál es la probabilidad de que los tres sean conquenses? (0.75 pts)

6 La desviación típica del número de horas diarias que duermen los estudiantes de un instituto es de 3 horas. Se considera una muestra aleatoria de 40 estudiantes de ese instituto que revela una media de sueño de 7 horas. Suponiendo que el número de horas de sueño sigue una distribución normal. Se pide:

a) Encontrar el intervalo de confianza al 97% para el número medio de horas de sueño de todos los estudiantes de esa comunidad. (1 pto)

b) Interpretar el significado del intervalo obtenido. (0.5 pts)

c) Si deseamos obtener un intervalo de anchura menor, ¿qué opciones tendríamos? Razona tu respuesta. (0.5 pts)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Propuesta B

1 Queremos realizar una inversión en dos entidades bancarias con las siguientes condiciones: a) La cantidad “x” depositada en la entidad A no puede superar los 1200 euros. b) La cantidad “y” depositada en la entidad B no puede superar los 800 euros. (c) La suma de la cantidad depositada en A y de la cantidad depositada en B no puede exceder de 1600 euros. El interés anual ofrecido por la entidad A es del 3,5 % y el ofrecido por la entidad B es del 3,75 %.

a) Dibuja la región factible. (1 pto)

b) Determina las cantidades que debe depositar en cada una de las entidades para que, en las condiciones expuestas, el beneficio sea lo mayor posible. (0.5 ptos)

2 La suma de tres números “x”, “y”, “z” es 24. La división de “x” entre “y” tiene de cociente 3 y de resto “z”. La división de “y” entre “z” tiene de cociente 2 y de resto 1. Se pide:

a) Plantea un sistema de ecuaciones que responda a las condiciones del enunciado. (1.5 ptos)

b) Determina los números “x”, “y”, “z”. (0.5 ptos)

3 Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 1, & \text{si } x < 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ x^2 + 1. & \text{si } x > 0 \end{cases}$ Se pide:

a) Estudiar su continuidad en $x = 0$. (0.5 ptos)

b) Representa gráficamente la función. (1 pto)

4 La trayectoria seguida por un vagón de una atracción de feria viene definida por la función $f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 1$ en donde t representa el tiempo en minutos contado desde el momento en que se pone en marcha la atracción y $f(t)$ representa la altura en metros, respecto del suelo, en la que se encuentra el vagón. Se pide:

a) Tiempo que tarda el vagón en alcanzar la altura máxima y valor de ésta. (1 pto)

b) Si la atracción finalizara su recorrido en el minuto 4, ¿el punto de salida coincidiría con el de llegada? (0.5 ptos)

5 Según un estudio, el 94.6 % de los hogares españoles tienen teléfono móvil, el 75.6 % tiene teléfono móvil y fijo, y el 99.4 % dispone de uno o del otro.

a) Se selecciona un hogar español al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga teléfono fijo? (0.75 ptos)

b) Si se elige un hogar al azar y tiene teléfono fijo, ¿cuál es la probabilidad de que tenga móvil? (0.75 ptos)

6 Los siguientes datos son los pesos en gramos del contenido de 16 bolsas de lentejas que se seleccionaron de un proceso de llenado con el propósito de verificar el peso promedio: 503, 506, 491, 499, 498, 505, 503, 504, 493, 501, 505, 500, 497, 502, 506, 487 gramos. Si el peso de cada bolsa es una variable aleatoria normal con una desviación típica de 5 gr. Se pide:

a) Obtener el intervalo de confianza estimado al 95 %, para la media de llenado de este proceso. (1 pto)

b) Interpretar el significado del intervalo obtenido. (0.5 ptos)

c) ¿Crees que sería válido el intervalo de confianza obtenido, si hubiéramos elegido las bolsas más vacías?. Razona tu respuesta. (0.5 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

1A.- Solución:

$$M = 3 \cdot I + A \cdot B = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$a) M = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) X \cdot C = I \Rightarrow X = C^{-1} = \frac{1}{|C|} \cdot \text{Traspuesta de adjuntos} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

2A.- Solución:

Llamemos r al número de euros que vale un refresco y p al número de euros que vale un bocadillo

$$a) \begin{cases} r + b = 5 \\ 2r + 3b = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2r - 2b = -10 \\ 2r + 3b = 13 \end{cases} \Rightarrow b = 3, r = 2$$

$$b) 3r + 2b = 12 \text{ €}$$

3A.- Solución:

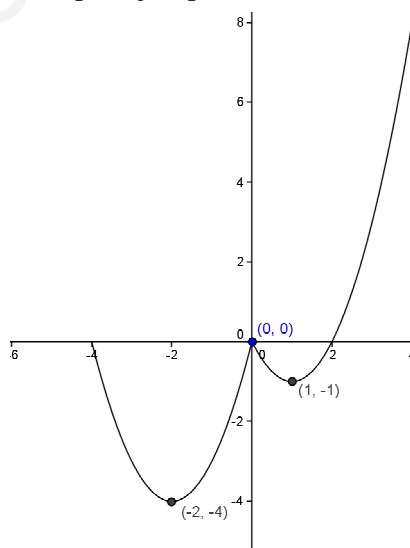
Cada trozo de la función es parte de una parábola. Ambos trozos se encuentran en $(0,0)$

$$a) f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + 4x = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 2x = 0 \text{ luego es continua en } x=0$$

b) Los vértices de las parábolas son los puntos en los que se anula la derivada

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 0, x = -2 \\ f'(x) = 0, x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Mínimo } (-2, -4) \\ \text{Mínimo } (1, -1) \end{cases}$$

Aunque la función no es derivable en $x = 0$, tiene un máximo en $(0,0)$ pues allí es mayor que en un entorno centrado en el 0 por ejemplo el de centro = 0 y radio 0,1.

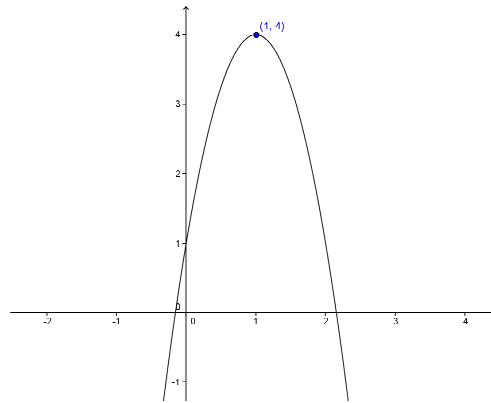


4A.- Solución:

Por un lado $f(1) = 4$ y por otro la derivada, $f'(x) = 2ax + 6$ se anulará en $x = 1$. Esto nos lleva a establecer el sistema:

$$\begin{cases} f(1) = 4 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 6 + b = 4 \\ 2a + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 1 \end{cases} \quad \text{Por otro lado, cuando la derivada es negativa la}$$

función es decreciente: $f'(x) < 0 \Rightarrow -6x + 6 < 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow \text{decreciente en } (1, +\infty)$



5A.- Solución

a) La probabilidad de que el primer ordenador toque a un albaceteño es $100/300 = 1/3$, luego la de que no toque a un albaceteño es $2/3$. Si para el segundo ordenador hay un nuevo sorteo entre todas las personas, tenemos que la probabilidad de que ninguna de las dos veces toque a un albaceteño es $2/3 * 2/3 = 4/9$

b) La probabilidad de que la primera persona sea conquense es $50/300$. La de que la segunda vuelva a ser conquense es $49/299$ y la de que la tercera lo sea habiendo sido las dos primeras es $48/298$. Luego la probabilidad pedida es $\frac{50 * 49 * 48}{300 * 299 * 298}$

6A.- Solución:

a) Para obtener el intervalo de confianza debemos tener en cuenta que:

$$P\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha, \text{ donde } 1 - \alpha \text{ es el nivel de confianza, (en}$$

nuestro caso 0,97). $\bar{x}$ la media de la muestra, en nuestro caso 7, σ la desviación típica 3 y n el tamaño de la muestra 40

$$1 - \alpha = 0,97 \Rightarrow \alpha = 0,03 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,015 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,17. \text{ Ya que } 1 - 0,015 = 0,985 \text{ (ver tabla).}$$

$$\text{Luego el intervalo pedido es } \left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (5,97, 8,03)$$

b) De cada 100 veces que elijamos un estudiante de esa comunidad al azar en 97 el número de horas de sueño estará en ese intervalo.

c) Si queremos mantener el nivel de confianza y que el intervalo sea menor, debemos aumentar el tamaño de la muestra porque así disminuimos el radio del intervalo, ya que,

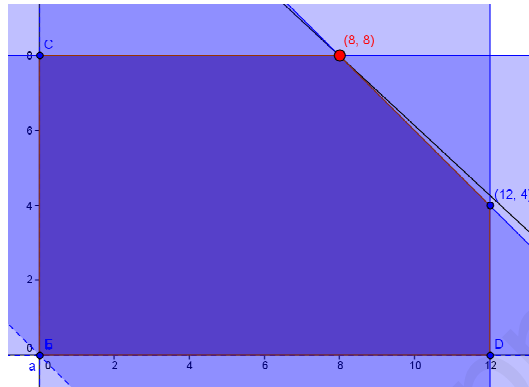
como vemos en la formula al aumentar n disminuye el radio $= z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

1B.- Solución:

Las restricciones que definen la región factible son
$$\begin{cases} 0 < x \leq 1200 \\ 0 < y \leq 800 \\ x + y \leq 1600 \end{cases}$$
 Región que queda

reflejada a escala en el dibujo. Los vértices los obtenemos como intersección de cada dos rectas que la limitan

El beneficio $B(x, y) = 3,5\%x + 3,75\%y$ se hace máximo en el vértice (800 , 800) donde $B(800, 800) = 5800€$



2B.- Solución:

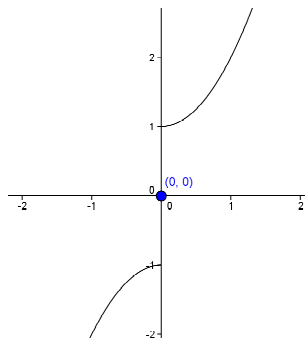
$$\begin{cases} x + y + z = 24 \\ \frac{x}{y} = 3 + \frac{z}{y} \\ \frac{y}{z} = 2 + \frac{1}{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 24 \\ x = 3y + z \\ y = 2z + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y + z + y + z = 24 \\ y - 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y + 2z = 24 \\ y - 2z = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 5 \\ z = 2 \\ x = 17 \end{cases}$$

Para establecer el sistema hemos utilizado las propiedades de la división de números.

3B.- Solución:

a) $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x^2 - 1 = -1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + 1 = 1$ Luego la función no es continua en $x = 0$ a pesar de estar definida en ese punto. El resto de la gráfica son dos ramas de parábola sencillas.



4B.- Solución:

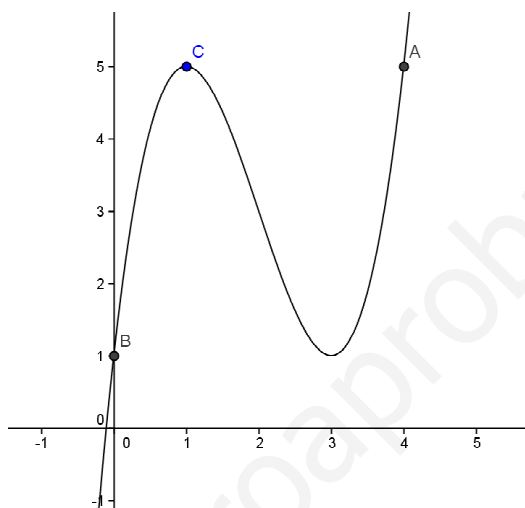
a) Puesto que la función es derivable, las derivadas primera y segunda nos sirven para obtener el máximo:

$$f'(t) = 3t^2 - 12t + 9 \Rightarrow f'(t) = 0 \text{ cuando } t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ y } t = 3 \quad \text{En un minuto}$$

$$f''(t) = 6t - 12 \Rightarrow f''(1) = 6 - 12 = -6 < 0 \Rightarrow \text{máximo}(1, f(1)) = (1, 5)$$

alcanza los 5 metros. En el punto (3, f(3)) hay un mínimo porque la derivada segunda es positiva.

b) $f(4) = 4^3 - 6 \cdot 4^2 + 9 \cdot 4 + 1 = 5 \neq f(0) = 1$ Luego el punto de salida no coincide con el de llegada.



5B.- Solución:

a) Sabemos que

$$p(F) = p(M \cup F) - p(M) + p(M \cap F) = 99,4\% - 94,6\% + 75,6\% = 80,4\%$$

$$b) p\left(\frac{M}{F}\right) = \frac{p(M \cap F)}{p(F)} = \frac{75,6\%}{80,4\%} = 94,03\%$$

6B.- Solución:

a) Para obtener el intervalo de confianza debemos tener en cuenta que:

$$p\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha, \text{ donde } 1 - \alpha \text{ es el nivel de confianza, (en}$$

nuestro caso 0,95). $\bar{x}$ la media de la muestra, en nuestro caso 500 (sumamos y dividimos por 16). σ la desviación típica 5 y n el tamaño de la muestra 16

$$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96. \text{ Ya que } 1 - 0,025 = 0,975 \text{ (ver tabla).}$$

$$\text{Luego el intervalo pedido es } \left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (497,55, 502,45)$$

b) Podemos asegurar, con un nivel de confianza del 95% que el peso de una bolsa de lentejas elegida al azar entre todas las llenadas en el proceso estará entre 497,55 gramos y 502,45 gramos. O de otra forma, de cada 100 bolsas que elijamos al azar el peso de 95 estará en ese intervalo.

c) Si las 16 bolsas elegidas hubiesen sido las más vacías, no habría sido una elección al azar y la teoría no se puede aplicar a ese caso. Luego el intervalo obtenido con esos datos no podríamos considerarlo con una confianza del 95%.