

Propuesta A

1A.- Dada la función $f(x) = \frac{4x^2 + 3x + 4}{2x}$, se pide:

- a) Calcula las asíntotas verticales y oblicuas **f(x) (1'25 puntos)**
 b) Coordenadas de los máximos y mínimos relativos de **f(x) (1'25 puntos)**

a)

$$2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{4 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 4}{2 \cdot 0} = \frac{4}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \Rightarrow \text{Asíntota vertical} \Rightarrow x = 0$$

Asíntota oblicua

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x^2 + 3x + 4}{2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x + 4}{2x^2} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x + 3}{4x} = \frac{\infty}{\infty} =$$

$$\xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8}{4} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 + 3x + 4}{2x} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x + 4 - 4x^2}{2x} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 4}{2x} = \frac{\infty}{\infty} =$$

$$\xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Asíntota oblicuas $\Rightarrow y = 2x + \frac{3}{2}$ cuando $x \rightarrow \infty$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{4x^2 + 3x + 4}{2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 3x + 4}{2x^2} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x + 3}{4x} = \frac{-\infty}{-\infty} =$$

$$\xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8}{4} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x^2 + 3x + 4}{2x} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 3x + 4 - 4x^2}{2x} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 4}{2x} = \frac{-\infty}{-\infty} =$$

$$\xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Asíntota oblicuas $\Rightarrow y = 2x + \frac{3}{2}$ cuando $x \rightarrow -\infty$

2A.- Calcula las siguientes integrales

a) $\int [\cos(2x) + \operatorname{sen} x \cdot \cos x] dx$ (1'25 puntos)

b) $\int \frac{x^3 - 1}{x + 2} dx$ (1'25 puntos)

a)

$$I = \int \cos(2x) dx + \int \operatorname{sen} x \cdot \cos x dx = \int \cos t \frac{dt}{2} + \int u du = \frac{1}{2} \int \cos t dt + \frac{1}{2} \cdot u^2 = \frac{1}{2} \operatorname{sen} t + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2}$$

$$\begin{cases} 2x = t \Rightarrow 2 dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{2} \\ \operatorname{sen} x = u \Rightarrow \cos x dx = du \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + K$$

b)

$$\begin{array}{r} x^3 - 1 \quad | \quad x + 2 \\ \hline -x^3 - 2x^2 \quad \quad x^2 - 2x + 4 \\ \hline -2x^2 \quad \quad -1 \\ \quad 2x^2 + 4x \\ \quad \quad 4x - 8 \\ \quad \quad \quad -9 \end{array}$$

$$I = \int \frac{x^3 - 1}{x + 2} dx = \int (x^2 - 2x + 4) dx - 9 \int \frac{dx}{x + 2} = \frac{1}{3} x^3 - 2 \cdot \frac{1}{2} x^2 + 4x - 9 \int \frac{dt}{t} = \frac{x^3}{3} - x^2 + 4x - 9 \ln t$$

$$x + 2 = t \Rightarrow dx = dt$$

$$I = \int \frac{x^3 - 1}{x + 2} dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 4x - \ln(x + 2)^9 + K$$

3A.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Resuelve el sistema matricial: $\begin{cases} 2X + 3Y = A \\ X + Y = B \end{cases}$ (1'25 puntos)

b) Encuentra una fórmula general para B^n , donde $n \in \mathbb{N}$ (Indicación: calcula las primeras potencias de la matriz **B**) (1'25 puntos)

a)

$$\begin{cases} 2X + 3Y = A \\ -3X - 3Y = (-3)B \end{cases} \Rightarrow -X = A - 3B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow X = -\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2X + 3Y = A \\ -2X - 2Y = (-2)B \end{cases} \Rightarrow Y = A - 2B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$$

b)

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \Rightarrow B^3 = BB^2 = BI = B \Rightarrow B^4 = B^2 B^2 = I \cdot I = I \cdots B^5 = B \Rightarrow B^6 = I \Rightarrow$$

$$n = \text{par} \Rightarrow B^n = I \Rightarrow n = \text{impar} \Rightarrow B^n = B$$

4A.- Consideremos el plano $\pi \equiv x - z = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + at \\ y = 1 - t, t \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases}$

- a) Determinar el parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que la recta r y el plano π sean paralelos. **(1'25 puntos)**
 b) Para el valor de a determinado, obtén las ecuaciones paramétricas de una recta r' paralela al plano π y que corte perpendicularmente a r en el punto $P(1, 1, 0)$ **(1'25 puntos)**

a) Si son paralelos la recta y el plano sus vectores directores son perpendiculares y su producto escalar es nulo

$$\begin{cases} \vec{v}_\pi = (1, 0, -1) \\ \vec{v}_r = (a, -1, 2) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_\pi \perp \vec{v}_r \Rightarrow \vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_r = 0 \Rightarrow (1, 0, -1) \cdot (a, -1, 2) = 0 \Rightarrow a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

b) El vector director de r' es perpendicular, a la vez, al vector director de la recta r y al del plano π calculándolo como el producto vectorial de estos vectores.

$$\begin{cases} \vec{v}_\pi = (1, 0, -1) \\ \vec{v}_r = (2, -1, 2) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_\pi \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{j} - \vec{k} - \vec{i} - 2\vec{j} = -\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k} \Rightarrow$$

$$\vec{v}_{r'} = (-1, -4, -1) \equiv (1, 4, 1) \Rightarrow r' \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + 4\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Propuesta B

1B.- En cierto experimento la cantidad de agua en estado líquido **C(t)**, medida en litros, está determinada en función del tiempo **t**, medido en horas, por la expresión: $C(t) = \frac{2}{3} + 10t + \frac{10}{t} + \frac{240}{t^3}$ $t \in [1, 10]$

Halla cual es la cantidad mínima de agua en estado líquido y en que instante de tiempo se obtiene, en el intervalo comprendido entre **t = 1** hora y **t = 10** horas **(2'5 puntos)**

$$C'(t) = 10 - \frac{10}{t^2} - \frac{240 \cdot 3t^2}{t^6} = 10 - \frac{10}{t^2} - \frac{720}{t^4} = \frac{10t^4 - 10t^2 - 720}{t^4} = 10 \frac{t^4 - t^2 - 72}{t^4} \Rightarrow C'(t) = 0 \Rightarrow$$

$$10 \frac{t^4 - t^2 - 72}{t^4} = 0 \Rightarrow t^4 - t^2 - 72 = 0 \Rightarrow t^2 = u \Rightarrow u^2 - u - 72 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-72) = 289 \geq 0 \Rightarrow$$

$$u = \frac{1 \pm \sqrt{289}}{2} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{1+17}{2} = 9 \Rightarrow t^2 = 9 \Rightarrow t = \pm\sqrt{9} \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -3 \Rightarrow \text{No es solución} \end{cases} \\ u = \frac{1-17}{2} = -8 \Rightarrow t = \pm\sqrt{-8} \Rightarrow \text{Solución imaginaria} \Rightarrow \text{Sin solución} \end{cases} \Rightarrow$$

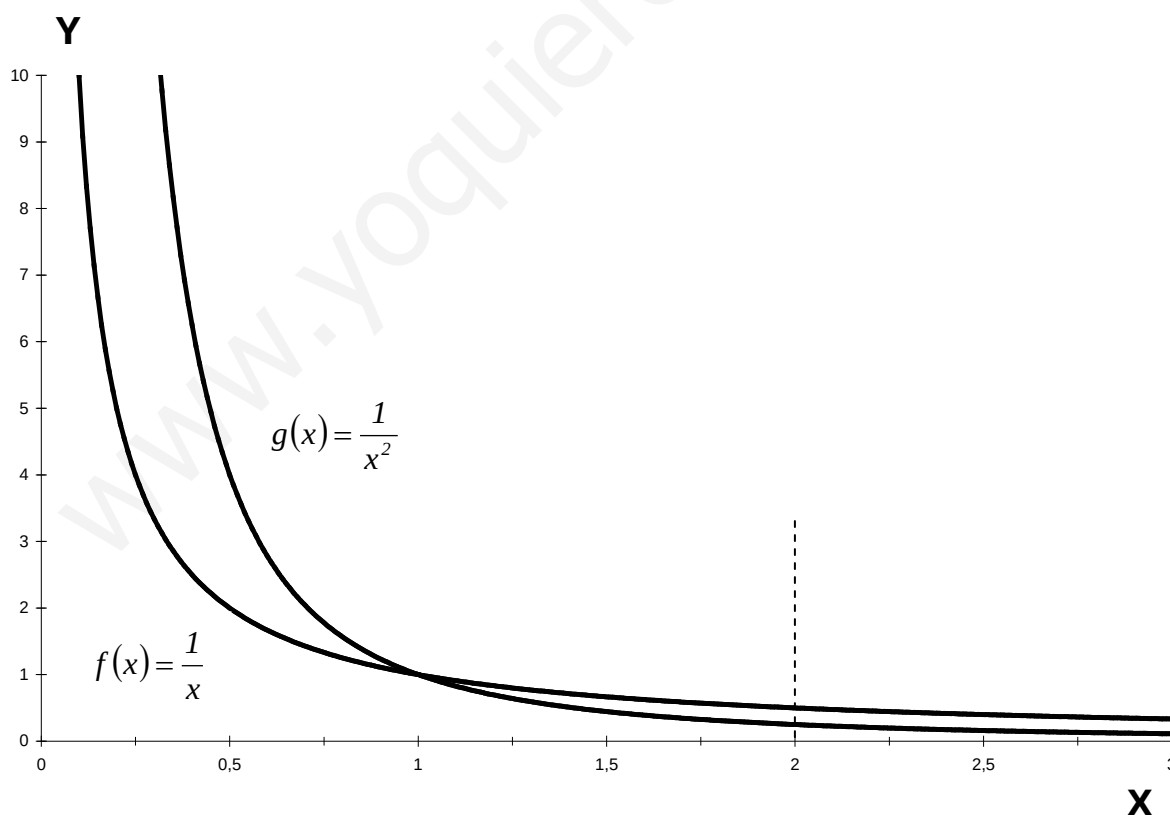
$$C''(t) = \frac{20}{t^3} + \frac{720 \cdot 4}{t^5} = \frac{20}{t^3} + \frac{2880}{t^5} \Rightarrow C''(3) = \frac{20}{3^3} + \frac{2880}{3^5} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \Rightarrow t = 3 \text{ horas}$$

2B.- a) Representar gráficamente la región del primer cuadrante limitada por las gráficas de las funciones

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ y } g(x) = \frac{1}{x^2}, \text{ y la recta } x = 2 \text{ (0'5 puntos)}$$

b) Calcula el área de dicha región **(2 puntos)**

a)



Continuación del Problema 2B

$$\begin{cases} f(3) = \frac{1}{3} \\ g(3) = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3} > \frac{1}{9} \Rightarrow f(x) > g(x) \Rightarrow x \in \mathbb{R} / x > 1$$

$$\text{Punto de corte entre funciones} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow (x-1)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \Rightarrow \text{No solución} \end{cases}$$

$$A = \int_1^2 \frac{1}{x} dx - \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = [\ln x]_1^2 - \int_1^2 x^{-2} dx = (\ln 2 - \ln 1) - \left(\frac{1}{-1} \right) [x^{-1}]_1^2 = \ln 2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1} \right) = \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) u^2$$

3B.- a) Clasifica, en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$, el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \lambda x + 2y - z = \lambda \\ 3x - y - z = 1 \\ 5x + y - 2z = 3 \end{cases}$$

(1'5 puntos)b) Resuélvelo, si es posible, para $\lambda = 2$ **(1 punto)**

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\lambda - 10 - 3 - 5 + \lambda + 12 = 3\lambda - 6 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow 3\lambda - 6 = 0 \Rightarrow 3\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = 2$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} - \{2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$

Si $\lambda = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 3 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & 2 & -2 \\ -10 & -2 & 4 & -6 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 8 & -1 & 4 \\ 0 & 8 & -1 & 4 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 8 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{La tercera ecuación es combinación lineal de las otras dos} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

b)

Si $\lambda = 2 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 8 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow 8y - z = 4 \Rightarrow z = -4 + 8y \Rightarrow 2x + 2y - (-4 + 8y) = 2 \Rightarrow 2x + 2y + 4 + 8y = 2$$

$$2x + 10y + 4 = 2 \Rightarrow 2x = -10y - 4 + 2 \Rightarrow x = -10y - 1 \Rightarrow$$

$$\text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = (-10\lambda - 1, \lambda, -4 + 8y)$$

4.B.- Dado los puntos de coordenadas **A(0 , 1 , 0)**, **B(1 , 2 , 3)**, **C(0 , 2 , 1)** y **D(k , 1 , 1)**, donde $k \in \mathbb{R}$:

a) Determina el área del triángulo de vértices **A**, **B** y **C** (1 punto)

b) ¿Para que valores del parámetro **k** el tetraedro cuyos vértices son **A**, **B**, **C** y **D** tiene un volumen de 5 u^3 ? (1'5 puntos)

a) El área del triángulo es igual a la mitad del modulo del producto vectorial de los vectores **AB** y **AC**

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1, 2, 3) - (0, 1, 0) = (1, 1, 3) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 2, 1) - (0, 1, 0) = (0, 1, 1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \vec{i} + \vec{k} - 3\vec{i} - \vec{j} = -2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6} \Rightarrow$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ u}^2$$

b) El volumen del tetraedro es igual a un sexto del modulo del producto mixto (escalar por vectorial) de los vectores **AD** y **AB** por **AC**

$$V = \frac{1}{6} \cdot |\overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})| \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AD} = (k, 1, 1) - (0, 1, 0) = (k, 0, 1) \\ \overrightarrow{AB} = (1, 1, 3) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 1, 1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = k + 1 - 3k = -2k + 1 \Rightarrow 5 = \pm \frac{1}{6} \cdot |-2k + 1| \Rightarrow 30 = \pm |-2k + 1| \Rightarrow \begin{cases} 30 = -2k + 1 \\ 30 = 2k - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 29 = -2k \Rightarrow 2k = -29 \Rightarrow k = -\frac{29}{2} \\ 30 = 2k - 1 \Rightarrow 2k = 31 \Rightarrow k = \frac{31}{2} \end{cases}$$