Propuesta A

1A.- a) Definición de función continua en un punto **(0'5 puntos)**

b) Determinar el valor del parámetro $a \in \Re$ para que la función $f(x)=\begin{cases} ax^2 & si \quad x \le 3 \\ \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} & si \quad x > 3 \end{cases}$ sea continua en **x = 3 (2 puntos)**

a) Una función es continua en un punto **x = x$_0$** si verifica las siguientes condiciones:

- Existe **f(x$_0$),** es decir, la función está definida en **x = x$_0$**
- Existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$
- Los dos valores anteriores coinciden, esto es $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

b)

$$\begin{cases} f(3) = \lim_{x \to 3^-} f(x) = a \cdot 3^2 = 9a \\ \lim_{x \to 3^+} f(x) = \dfrac{\sqrt{3+1}-2}{3-3} = \dfrac{0}{0} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x \to 3^+} \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{1} = \dfrac{1}{2\sqrt{3+1}} = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(3) = \lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) \Rightarrow 9a = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{36}$$

2A.- Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \dfrac{1+8x}{1+x^2}\,dx$ **(1'25 puntos)**

b) $\int (x^2+x)\cos x\,dx$ **(1'25 puntos)**

a)

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx + 8\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = arc\ tg\ x + 8\int \frac{1}{t}\,\frac{dt}{2} = arc\ tg\ x + 4\int \frac{dt}{t} = arc\ tg\ x + 4 \cdot \ln t = arc\ tg\ x + \ln\left(1+x^2\right)^4 + K$$

$$Cambio\ de\ variable \Rightarrow 1+x^2 = t \Rightarrow 2x\,dx = dt \Rightarrow x\,dx = \frac{dt}{2}$$

b)

$$I = \int (x^2+x)\cos x\,dx = (x^2+x)\,sen\ x + \int sen\ x\,(2x+1)\,dx = (x^2+x)\,sen\ x + (2x+1)(-\cos x) - \int (-\cos x)\,2\,dx$$

$$Por\ partes \Rightarrow \begin{cases} (x^2+x) = u \Rightarrow (2x+1)\,dx = du \\ \cos x\,dx = dv \Rightarrow v = \int \cos x\,dx = sen\ x \end{cases} \qquad \begin{cases} (2x+1) = u \Rightarrow 2\,dx = du \\ sen\ x\ x\,dx = dv \Rightarrow v = \int sen\ x\,dx = -\cos x \end{cases}$$

$$I = (x^2+x)\,sen\ x - (2x+1)\cos x + 2\int \cos x\,dx = (x^2+x)\,sen\ x - (2x+1)\cos x + sen\ x + K$$

3A.- He pensado en tres números, de manera que la suma de los dos primeros es igual al tercero. Si al triple del primer número le resto el doble del segundo vuelvo a obtener el tercero. Si al doble del primero le resto la mitad del segundo también obtengo el tercero. Por último si al doble del primero le resto el segundo y sumo uno, de nuevo vuelvo a obtener el tercer número.

a) Plantea un sistema de ecuaciones que recoja la información anterior y clasifícalo **(1'25 puntos)**

b) Determina, si el problema tiene solución, los tres números que he pensado. **(1'25 puntos)**

a) Llamando **P**, **S** y **T** al primer, segundo y tercer número respectivamente

$$\begin{cases} P+S=T \\ 3P-2S=T \\ 2P-\dfrac{S}{2}=T \\ 2P-S+1=T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P+S-T=0 \\ 3P-2S-T=0 \\ 4P-S-2T=0 \\ 2P-S-T=-1 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 15 & -5 & 5 \end{array}\right) \equiv$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow Es\ Compatible\ Deter\min ado\ ya\ que\ la\ tercera\ ecuación\ es\ combinación\ lineal\ de$$

$$las\ dos\ primeras\ y\ rang(A) = rang(A/B) = Número\ de\ incognitas$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow T=5 \Rightarrow -5S+2\cdot 5=0 \Rightarrow -5S+10=0 \Rightarrow 5S=10 \Rightarrow S=\frac{10}{5}=2 \Rightarrow P+2-5=0 \Rightarrow$$

$$P-3=0 \Rightarrow P=3 \Rightarrow Solución \Rightarrow (P\ ,S\ ,T)=(3\ ,2\ ,5)$$

4A.- Consideremos las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 - at \\ y = b + t \ , con\ t \in \Re \\ z = 2t \end{cases}$ y $s \equiv x - 2 = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+6}{2}$

a) Analizar los parámetro $a, b \in \Re$ para que las dos rectas se corten perpendicularmente en un punto **(1'25 puntos)**

b) Calcula para los parámetros obtenidos en el apartado anterior, las coordenadas del punto de corte **(1 punto)**

a) La Primera condición depende de la perpendicularidad de las rectas y es que el producto escalar de sus vectores directores es nulo

La segunda condición se cumple en la igualdad de los puntos de las dos rectas

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (-a\ ,1\ ,2) \\ \overrightarrow{v_s} = (1\ ,-1\ ,2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{v_s} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s} = 0 \Rightarrow (-a\ ,1\ ,2)\cdot(1\ ,-1\ ,2) = 0 \Rightarrow -a-1+4=0 \Rightarrow a = 3$$

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = 1-3t \\ y = b+t \\ z = 2t \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 2-\lambda \\ z = -6+2\lambda \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-3t = 2+\lambda \\ b+t = 2-\lambda \\ 2t = -6+2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda+3t = -1 \\ \lambda+t+b = 2 \\ 2\lambda-2t = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda+3t = -1 \\ -\lambda+t = -3 \end{cases} \Rightarrow 4t = -4 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow -\lambda-1 = -3 \Rightarrow$$

$$-\lambda = -2 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow 2-1+b = 2 \Rightarrow -1+b = 0 \Rightarrow b = 1$$

$b)$

$$Punto\ P\ de\ corte \Rightarrow P\begin{cases} x = 1-3\cdot(-1) \\ y = 1-1 \\ z = 2\cdot(-1) \end{cases} \Rightarrow P(4\ ,0\ ,-2)$$

Propuesta B

1B.- Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$ **(1'25 puntos)**

b) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen\ x - x\cos x}{x^3}\right)$ **(1'25 puntos)**

a)

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \left(\frac{2\cdot 1+1}{1+2}\right)^{\frac{1}{1-1}} = \left(\frac{3}{3}\right)^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty} \Rightarrow Llamando\ L = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}} \Rightarrow \ln L = \lim_{x\to 1^+} \ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}} \Rightarrow$$

$$\ln L = \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}\cdot \ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right) = \lim_{x\to 1^+}\frac{\ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)}{x-1} = \frac{\ln(1)}{1-1} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{2\cdot(x+2)-(2x+1)}{(x+2)^2}}{1} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{2\cdot(x+2)-(2x+1)}{(x+2)^2} = \lim_{x\to 1^+}\frac{2x+4-2x-1}{(x+2)^2} = \lim_{x\to 1^+}\frac{3}{(x+2)^2} = \frac{3}{(1+2)^2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

b)

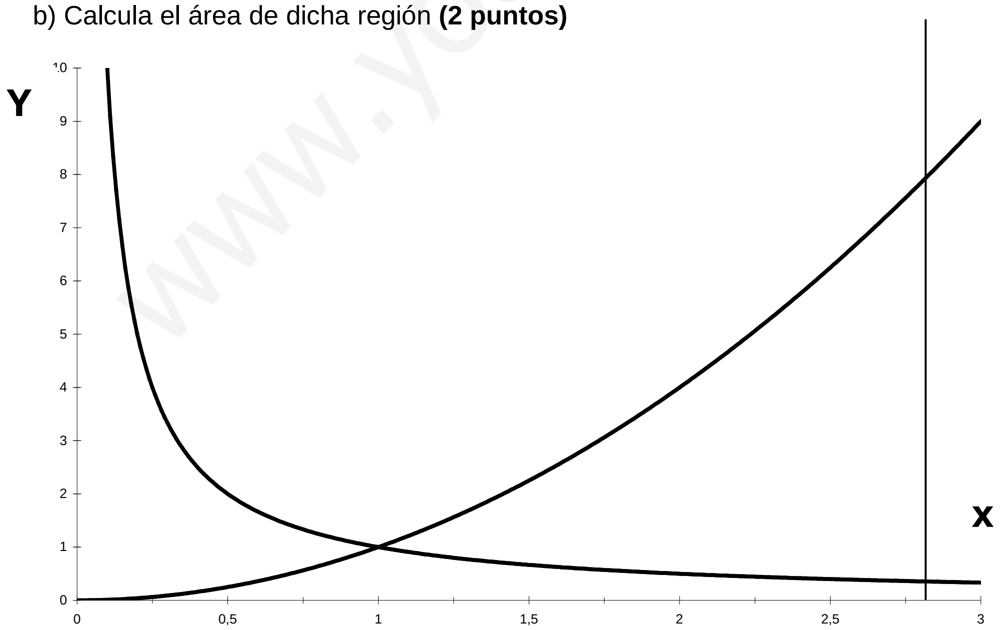
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen\ x - x\cos x}{x^3}\right) = \frac{sen\ 0 - 0\cdot \cos 0}{0^3} = \frac{0-0\cdot 1}{0} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - (\cos x - x\ sen\ x)}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos x + x\ sen\ x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x\ sen\ x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{3x} = \frac{sen\ 0}{3\cdot 0} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{3} =$$

$$= \frac{\cos 0}{3} = \frac{1}{3}$$

2.B.- a) Representar gráficamente la región limitada por la grafica de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \frac{1}{x}$ $a \in \Re$, el eje de abcisas y la recta **x = e (0'5 puntos)**

b) Calcula el área de dicha región **(2 puntos)**



Continuación Problema 2B

$$Punto\ de\ corte\ entre\ funciones \Rightarrow x^2 = \frac{1}{x} \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1} = 1$$

$$A = \int_1^e x^2 dx - \int_1^e \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{3} \cdot \left[x^3\right]_1^e - \left[ln\ x\right]_1^e = \frac{1}{3} \cdot \left(e^3 - 1^3\right) - \left(ln\ e - ln\ 1\right) = \frac{e^3 - 1}{3} - (1 - 0) = \frac{e^3 - 1 - 3}{3} = \frac{e^3 - 4}{3}\ u^2$$

3B.- Consideremos la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}$, con $k \in \Re$. Demuestra que el rango de la matriz **AA^t es** siempre igual al rango de la matriz **A^{t}A,** cualquiera que sea el valor de **k**. (Recuerde que **A^t** representa la matriz traspuesta de la matriz **A**) **(2'5 puntos)**

$$\begin{cases} AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \\ k & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+k^2 & k \\ k & k^2+1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|AA^t\right| = \begin{vmatrix} 1+k^2 & k \\ k & k^2+1 \end{vmatrix} = \left(1+k^2\right)^2 - k^2 = 1 + 2k^2 + k^4 - k^2 \\ A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \\ k & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & k^2 & k \\ k & k & k^2+1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & k^2 & k \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & k^2 & k \\ 0 & -k^2 & -k \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & k^2 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left|AA^t\right| = 1 + k^2 + k^4 \Rightarrow Si\ \left|AA^t\right| = 0 \Rightarrow k^2 = t \Rightarrow 1 + t + t^2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0 \Rightarrow Sin\ solución \\ rang\ \left(A^t A\right) \Rightarrow \begin{cases} Si\ k = 0 \Rightarrow rang\ \left(A^t A\right) = 1 \\ Si\ k \neq 0 \Rightarrow rang\ \left(A^t A\right) = 2 \end{cases} \end{cases}$$

$$Se\ cumple\ para\ \forall k \in \Re - \{0\}\ ya\ que \Rightarrow \begin{cases} Si\ k = 0 \Rightarrow rang\ \left(A^t A\right) = 1 \neq rang\ \left(AA^t\right) = 2 \\ Si\ k \neq 0 \Rightarrow rang\ \left(A^t A\right) = rang\ \left(AA^t\right) = 2 \end{cases}$$

4.B.- a) Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2y-z=-1 \end{cases}$ y el punto **P(0 , 1 , 0)**, obtén las ecuaciones paramétricas de una recta **r'** que pase por **P** y corte perpendicularmente a **r (1'25 puntos)**

b) Encuentra las coordenadas del punto **P'** simétrico de **P** respecto a **r (1 punto)**

a) El vector formado por el punto **R** general determinado por la ecuación de la recta **r** y el punto **P** es perpendicular al vector director de esa recta y por lo tanto su producto escalar es nulo. El vector director de r' es proporcional o igual a PR

$$z=1+2y \Rightarrow x+y+1+2y=0 \Rightarrow x=-1-3y \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-1-3\lambda \\ y=\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases} \Rightarrow R(-1-3\lambda\ ,\lambda\ ,1+2\lambda)$$

$$\begin{cases} PR=(-1-3\lambda\ ,\lambda\ ,1+2\lambda)-(0\ ,1\ ,0)=(-1-3\lambda\ ,-1+\lambda\ ,1+2\lambda) \\ v_r=(-3\ ,1\ ,2) \end{cases} \Rightarrow PR \perp v_r \Rightarrow PR \cdot v_r=0 \Rightarrow$$

$$(-3\ ,1\ ,2)\cdot(-1-3\lambda\ ,-1+\lambda\ ,1+2\lambda)=0 \Rightarrow 3+9\lambda-1+\lambda+2+4\lambda=0 \Rightarrow 4+14\lambda=0 \Rightarrow 14\lambda=-4 \Rightarrow \lambda=-\frac{2}{7}$$

$$v_{r'}=PR=\left[-1-3\cdot\left(-\frac{2}{7}\right),-1+\left(-\frac{2}{7}\right),1+2\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)\right]=\left(-1+\frac{6}{7}\ ,-1-\frac{2}{7}\ ,1-\frac{4}{7}\right)=\left(-\frac{1}{7}\ ,-\frac{9}{7}\ ,\frac{3}{7}\right)\equiv(1\ ,9\ ,-3)$$

$$r' \equiv \begin{cases} x=\mu \\ y=1+9\mu \\ z=-3\mu \end{cases}$$

b) Hallaremos un plano π perpendicular a la recta **r**, que tiene como vector director el de la recta, y que contenga al punto **P**, por lo tanto el producto escalar de ese vector y el formado por **P** y el punto **G**, genérico del plano, como son perpendiculares, tiene valor nulo y es la ecuación del plano buscado

Una vez obtenido el plano hallaremos el punto **Q** de corte de ella con la recta **r** que es el punto medio entre **P** y su simétrico **P'**

$$\begin{cases} \overrightarrow{PG}=(x\ ,y\ ,z)-(0\ ,1\ ,0)=(x\ ,y-1\ ,z) \\ \overrightarrow{v_r}=(-3\ ,1\ ,2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{PG} \perp \overrightarrow{v_r} \Rightarrow \overrightarrow{PG}\cdot\overrightarrow{v_r}=0 \Rightarrow (-3\ ,1\ ,2)\cdot(x\ ,y-1\ ,z)=0 \Rightarrow$$

$$-3x+(y-1)+2z=0 \Rightarrow \pi \equiv 3x-y-2z+1=0 \Rightarrow$$

Punto Q de corte de la recta r con el plano π

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x=-1-3\lambda \\ y=\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases} \\ \pi \equiv 3x-y-2z+1=0 \end{cases} \Rightarrow 3\cdot(-1-3\lambda)-\lambda-2\cdot(1+2\lambda)+1=0 \Rightarrow -3-9\lambda-\lambda-2-4\lambda+1=0 \Rightarrow -14\lambda-4=0$$

$$14\lambda=-4 \Rightarrow \lambda=-\frac{4}{14}=-\frac{2}{7} \Rightarrow \text{ya fue hallada en a)} \Rightarrow (\text{se podia hacer directamente}) \Rightarrow$$

$$Q\begin{cases} x=-1-3\cdot\left(-\frac{2}{7}\right) \\ y=-\frac{2}{7} \\ z=1+2\cdot\left(-\frac{2}{7}\right) \end{cases} \Rightarrow Q\left(-\frac{1}{7}\ ,-\frac{2}{7}\ ,\frac{3}{7}\right) \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{7}=\frac{0+x_{P'}}{2} \Rightarrow 7x_{P'}=-2 \Rightarrow x_{P'}=-\frac{2}{7} \\ -\frac{2}{7}=\frac{1+y_{P'}}{2} \Rightarrow 7+7y_{P'}=-4 \Rightarrow 7y_{P'}=-11 \Rightarrow y_{P'}=-\frac{11}{7} \\ \frac{3}{7}=\frac{0+z_{P'}}{2} \Rightarrow 7z_{P'}=6 \Rightarrow z_{P'}=\frac{6}{7} \end{cases}$$

$$P'\left(-\frac{2}{7}\ ,-\frac{11}{7}\ ,\frac{6}{7}\right)$$