Propuesta A

1A.- a) Enuncia el Teorema de Bolzano y el Teorema de Rolle **(1 punto)**
b) Demuestra, usando el teorema de Bolzano, que existen, al menos, tres raíces reales distintas de la ecuación $f(x) = x^5 - 5x + 3 = 0$ **(1 punto)**
c) Demuestra, usando el teorema de Rolle, que la ecuación anterior no puede tener mas de tres raíces reales distintas **(0'5 puntos)**

a)
Teorema de Bolzano
Si **f(x)** es continua en el intervalo **[a , b],** y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo **[sign f(a) $\neq$ sign f(b)],** entonces existe, al menos, un punto $c \in (a\ , b)$ tal que **f(c) = 0**

Teorema de Rolle
Sea **f(x)** una función continua en **[a , b],** derivable en **(a , b)** y que verifica que **f(a) = f(b)**; entonces existe, al menos, un punto $c \in (a\ , b)$ tal que **f'(c) = 0**

b)
Sea $f(x) = x^5 - 5x + 3 = 0$,sabemos que esta función es continua en todo su dominio que es la recta real y el intervalo, entre otros, **[0 , 1]** toma valores, en los extremos de dicho intervalo:

$$f(0) = 0^5 - 5 \cdot 0 + 3 = 3 > 0 \text{ y } f(1) = 1^5 - 5 \cdot 1 + 3 = -1 < 0$$

con signo diferentes, **[sign f(0) $\neq$ sign f(1)],** por lo tanto existe, según el teorema de Bolzano, al menos, un punto $c \in (0\ , 1)$ tal que **f(c) = 0** que es una solución real de la función o lo que es lo mismo que
$f(c) = c^5 - 5c + 3 = 0$

En el intervalo **[1 , 2]** toma valores, en los extremos de dicho intervalo:
$f(1) = 1^5 - 5 \cdot 1 + 3 = -1 < 0$ y $f(2) = 2^5 - 5 \cdot 2 + 3 = 32 - 10 + 3 = 25 > 0$
con signo diferentes, **[sign f(1) $\neq$ sign f(2)],** por lo tanto existe, según el teorema de Bolzano, al menos, un punto $h \in (1\ , 2)$ tal que **f(h) = 0** que es una solución real de la función o lo que es lo mismo que
$f(h) = h^5 - 5h + 3 = 0$

En el intervalo **[0 , -2]** toma valores, en los extremos de dicho intervalo:
$f(-2) = (-2)^5 - 5 \cdot (-2) + 3 = -32 + 10 + 3 = -19 < 0$ y $f(0) = 0^5 - 5 \cdot 0 + 3 = 3 > 0$
con signo diferentes, **[sign f(-2) $\neq$ sign f(0)],** por lo tanto existe, según el teorema de Bolzano, al menos, un punto $j \in (-2\ , 0)$ tal que **f(j) = 0** que es una solución real de la función o lo que es lo mismo que
$f(j) = j^5 - 5j + 3 = 0$

c)
Comprobemos que la función $f(x) = x^5 - 5x + 3 = 0$ únicamente puede tener las raíces reales detectadas

Veamos ahora mediante el teorema de Rolle y trabajando por reducción al absurdo que estas raices son única.

Supongamos que **f(x)** tiene una cuarta raíz ***k*** , tales que **f(c) = f(k) = 0,** no perteneciendo **k** al intervalo **[-2 , 1]** en donde hemos buscado soluciones

Como **f(x)** es una función exponencial y polinómica, es continua y derivable en toda la recta real , o sea en el intervalo **[c , k]** y además toma el mismo valor en los extremos de dicho intervalo por lo que aplicando el teorema de Rolle, tenemos que existe, al menos, un punto $x_0 \in (c\ , k)$ tal que **f'(x_0) = 0**

Continuación del Problema 1A

La derivada de esta función es $f'(x)=5x^4-5$; así, para determinar el punto $\mathbf{x_0}$ tendremos que igualar su derivada a cero,

$$5x^4-5=0\Rightarrow 5x^4=5\Rightarrow x^4=\frac{5}{5}\Rightarrow x=\pm\sqrt[4]{1}\Rightarrow\begin{cases}x=1\in[-2,1]\\ x=-1\in[-2,1]\end{cases}$$

.

Esta ecuación no tiene una cuarta solución en el campo de los números reales, ya que, de haberla, debía de estar fuera del intervalo estudiado y los valores que anulan a la derivada (máximos o mínimos relativos) se encuentran en el intervalo en donde hemos detectado las tres raíces

2A.- Calcula las siguientes integrales $\int sen^2 x\cos x\,dx$ $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ **(1'25 puntos por integral)**

$$\int sen^2 x\cos x\,dx=\int t^2\,dt=\frac{1}{3}t^3=\frac{sen^3 x}{3}+K$$

$$sen\,x=t\Rightarrow \cos x\,dx=dt$$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx=\int e^u\cdot 2\,du=2e^u=2e^{\sqrt{x}}+K$$

$$\sqrt{x}=u\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}dx=du\Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}}=2\,du$$

3A.- Sabiendo que $\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}=5$, calcular el valor de los determinantes

$$\begin{vmatrix}b&b+a&2c\\e&e+d&2f\\h&h+g&2i\end{vmatrix}\quad\begin{vmatrix}a+d+g&b+e+h&c+f+i\\d+g&e+h&f+i\\g&h&i\end{vmatrix}$$

indicando las propiedades que usas en cada caso para justificar tu respuesta **(1'25 puntos por determinante)**

$$\begin{vmatrix}b&b+a&2c\\e&e+d&2f\\h&h+g&2i\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b&b&2c\\e&e&2f\\h&h&2i\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b&a&2c\\e&d&2f\\h&g&2i\end{vmatrix}(I)=0+2\cdot\begin{vmatrix}b&a&c\\e&d&f\\h&g&i\end{vmatrix}(II)=2\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}(III)=(-2)\cdot 5=-10$$

(I) *Si todos los elementos de una fila o columna de una matriz se descomponen en suma de dos sumandos, su determinante tambien se descompone en suma de los determinantes*

(II) *Si una matriz tiene dos filas o columnas iguales su determinante es igual a cero*

(III) *Si permutamos dos filas o columnas de una matriz su determinante cambia de signo*

$$\begin{vmatrix}a+d+g&b+e+h&c+f+i\\d+g&e+h&f+i\\g&h&i\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+d&b+e&c+f\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}(IV)=\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}d&e&f\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}(I)=\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}+0(II)=5$$

(IV) *Si una fila o una columna de una matriz se le suma o resta una combinación lineal de las otras filas o columnas, el determinante de la matriz resultante coincide con el del inicial*

4A.- Dado el plano $\pi \equiv x + y + 2z = 7$ y el punto **P(1 , 0 , 0)**

a) Calcula el punto **Q** de π que hace mínima la distancia a **P** **(1'25 puntos)**

b) Calcula el punto simétrico **P'** de **P** respecto del plano π **(1'25 puntos)**

a)Hallaremos una recta **r** perpendicular al plano que pase por el punto **P**, recta determinada por dicho punto y por el vector director del plano que es el de la recta. El punto de intersección de **r** con el plano π es el punto **Q** buscado

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_\pi} = (1 , 1 , 2) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow Inter\sec ción\ de\ r\ con\ \pi \Rightarrow 1 + \lambda + \lambda + 2 \cdot 2\lambda = 7 \Rightarrow 6\lambda = 6 \Rightarrow$$

$$\lambda = 1 \Rightarrow Q \begin{cases} x = 1 + 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \cdot 1 \end{cases} \Rightarrow Q(2 , 1 , 2)$$

b) El punto **Q** es el punto medio entre **P** y si simétrico **P'**

$$\begin{cases} 2 = \dfrac{1 + x_{P'}}{2} \Rightarrow 1 + x_{P'} = 4 \Rightarrow x_{P'} = 3 \\ 1 = \dfrac{0 + y_{P'}}{2} \Rightarrow y_{P'} = 2 \\ 2 = \dfrac{0 + z_{P'}}{2} \Rightarrow z_{P'} = 4 \end{cases} \Rightarrow P'(3 , 2 , 4)$$

Propuesta B

1B.- Dada la función $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{2x+6}$ calcula los parámetros $a,b\in\mathfrak{R}$ sabiendo que:

- **f(x)** tiene una asíntota oblicua de pendiente **2**
- **f(x)** tiene un mínimo relativo en el punto de abcisa **x = 0 (2'5 puntos)**

$$2=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax^2+b}{2x+6}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+b}{2x^2+6x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax^2}{x^2}+\frac{b}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{6x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x^2}}{2+\frac{6}{x}}=\frac{a+\frac{b}{\infty}}{2+\frac{6}{\infty}}=\frac{a+0}{2+0}=\frac{a}{2}\Rightarrow$$

$$\frac{a}{2}=2\Rightarrow a=4$$

$$f'(x)=\frac{2ax\,(2x+6)-2\left(ax^2+b\right)}{(2x+6)^2}=\frac{4ax^2+12ax-2ax^2-2b}{(2x+6)^2}=\frac{2ax^2+12ax-2b}{(2x+6)^2}=2\cdot\frac{ax^2+6ax-b}{(2x+6)^2}$$

$$f'(0)=0\Rightarrow 2\cdot\frac{a\cdot 0^2+6a\cdot 0-b}{(2\cdot 0+6)^2}=0\Rightarrow 2\cdot\frac{0+0-b}{(0+6)^2}=0\Rightarrow -\frac{2b}{36}=0\Rightarrow b=0$$

$$f(x)=\frac{4x^2}{2x+6}$$

2.B.- Calcula el área encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$ y **g(x) = 1**
(2'5 puntos)

$$\textit{Punto de corte entre funciones}\Rightarrow x^3-3x^2+2x+1=1\Rightarrow x^3-3x^2+2x=0\Rightarrow x\left(x^2-3x+2\right)=0\Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=0 \\ x^2-3x+2=0\Rightarrow\Delta=(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2=9-8=1\geq 0\Rightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}\Rightarrow\begin{cases} x=\dfrac{3+1}{2}=2 \\ x=\dfrac{3-1}{2}=1\end{cases}\end{cases}$$

$$x=\frac{1}{2}\in(0\,,1)\Rightarrow\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)+1=\frac{1}{8}-\frac{3}{4}+1+1=\frac{1-6+16}{8}=\frac{11}{8} \\ g\left(\frac{1}{2}\right)=1\end{cases}\Rightarrow\frac{11}{8}>1$$

$$x=\frac{3}{2}\in(1\,,2)\Rightarrow\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^3-3\left(\frac{3}{2}\right)^2+2\left(\frac{3}{2}\right)+1=\frac{27}{8}-\frac{27}{4}+3+1=\frac{27-54+32}{8}=\frac{5}{8} \\ g\left(\frac{3}{2}\right)=1\end{cases}\Rightarrow\frac{5}{8}<1$$

$$A=\int_0^1\left(x^3-3x^2+2x+1\right)dx-\int_0^1 dx+\int_1^2 dx-\int_1^2\left(x^3-3x^2+2x+1\right)dx=\int_0^1\left(x^3-3x^2+2x\right)dx-\int_1^2\left(x^3-3x^2+2x\right)dx$$

$$A=\frac{1}{4}\cdot\left[x^4\right]_0^1-3\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^1+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_0^1-\frac{1}{4}\cdot\left[x^4\right]_1^2+3\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_1^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_1^2$$

$$A=\frac{1}{4}\cdot\left(1^4-0^4\right)-\left(1^3-0^3\right)+\left(1^2-0^2\right)-\frac{1}{4}\cdot\left(2^4-1^4\right)+\left(2^3-1^3\right)-\left(2^2-1^2\right)=\frac{1}{4}-1+1-\frac{15}{4}+7-3=\frac{1}{2}\,u^2$$

3B.- a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \Re$

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ ax-3z=a \\ 2x+ay-z=a \end{cases}$$ **(1'5 puntos)**

b) Resuélvelo para el valor $a=1$ **(1 punto)**

$a)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 0 & -3 \\ 2 & a & -1 \end{vmatrix} = -6+2a^2+3a+a = 2a^2+4a-6 \Rightarrow Si\ |A|=0 \Rightarrow 2a^2+4a-6=0 \Rightarrow 2\left(a^2+2a-3\right)=0 \Rightarrow$$

$$a^2+2a-3=0 \Rightarrow \Delta = 2^2-4\cdot 1\cdot(-3)=4+12=16 \geq 0 \Rightarrow a=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{-2+4}{2}=1 \\ a=\frac{-2-4}{2}=-3 \end{cases}$$

$$\forall m \in \Re-\{-3\,,1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A)=3=\text{Número de incognitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$

$Si\ a=-3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & -3 & -1 & -3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & -5 & -5 & -3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow 0z=-2 \Rightarrow$$

$$z=-\frac{2}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

$Si\ a=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rang(A)=rang(A/B)=2<\text{Número de incognitas}$$

$\text{Sistema Compatible Indeterminado}$

$b)$

$$Si\ a=1 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

$$-y-5z=1 \Rightarrow y=-1-5z \Rightarrow x+(-1-5z)+2z=0 \Rightarrow x-1-5z+2z=0 \Rightarrow x=1+3z$$

$$\text{Solución} \Rightarrow (x\,,\,y\,,\,z)=(1+3\lambda\,,\,-1-5\lambda\,,\,\lambda)$$

4.B.- Dado el el punto **P(1 , 0 , 0)** y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = -1 \end{cases}$

a) Da unas ecuaciones paramétricas de la recta **s** que pase por **P** y corta perpendicularmente a **r** **(1'25 puntos)**
b) Calcula la distancia de P a r **(1'25 punto)**

a) El producto escalar del vector director de la recta **r** y el formado por el punto **P** y por el punto genérico **R** de la misma recta **r** es nulo ya que son rectas perpendiculares. Con el dato hallado tendremos el vector director de la recta **s** buscada

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (2\,,1\,,0) \\ \overrightarrow{PR} = (2\lambda\,,3+\lambda\,,-1) - (1\,,0\,,0) = (2\lambda - 1\,,3+\lambda\,,-1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{PR} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{PR} = 0 \Rightarrow$$

$$(2\,,1\,,0)\cdot(2\lambda - 1\,,3+\lambda\,,-1) = 0 \Rightarrow 4\lambda - 2 + 3 + \lambda = 0 \Rightarrow 1 + 5\lambda = 0 \Rightarrow 5\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{5} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_s} = \left[2\cdot\left(-\frac{1}{5}\right) - 1\,,3+\left(-\frac{1}{5}\right),-1\right] = \left(-\frac{2}{5} - 1\,,3 - \frac{1}{5}\,,-1\right) = \left(-\frac{7}{5}\,,\frac{14}{5}\,,-1\right) \equiv (-7\,,14\,,-5) \equiv (7\,,-14\,,5) \Rightarrow$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 + 7\mu \\ y = -14\mu \quad \mu \in \Re \\ z = 5\mu \end{cases}$$

b) La distancia pedida es la de P al punto de corte S de las rectas r y s que se puede hallar con el valor del parámetro buscado

$$S\begin{cases} x = 2\left(-\frac{1}{5}\right) \\ y = 3 + \left(-\frac{1}{5}\right) \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow S\left(-\frac{2}{5}\,,\frac{14}{5}\,,-1\right) \Rightarrow d(P,S) = \sqrt{\left[1 - \left(-\frac{2}{5}\right)\right]^2 + \left(0 - \frac{14}{5}\right)^2 + [0 - (-1)]^2}$$

$$d(P,S) = \sqrt{\left(1 + \frac{2}{5}\right)^2 + \left(-\frac{14}{5}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2 + \frac{196}{25} + 1} = \sqrt{\frac{49 + 196 + 25}{25}} = \sqrt{\frac{270}{25}} = \frac{\sqrt{270}}{5} = \frac{3\sqrt{30}}{5}\ u$$