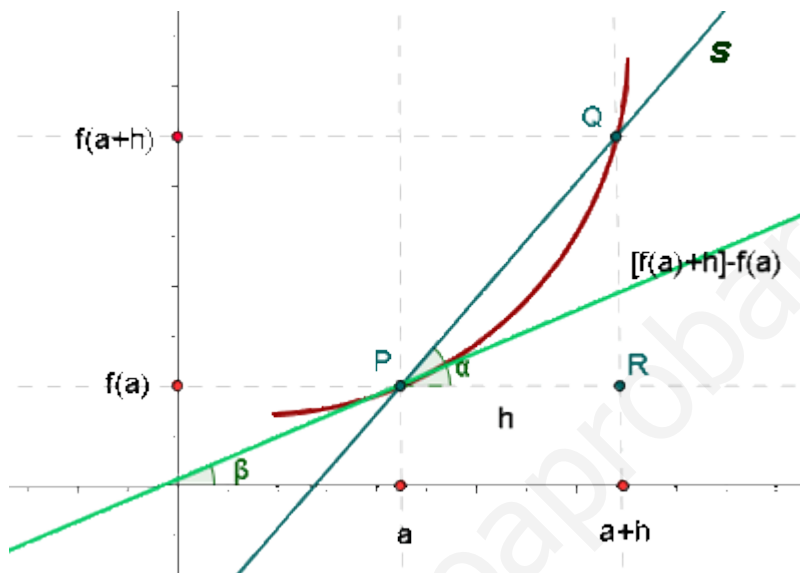


Propuesta A**1A.- a) Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto (0'5 puntos)**

b) Encuentra el punto de la función $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 30x + 1$ en el que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ es mínima. Encuentra también el punto donde la pendiente es máxima (2 puntos)

a)

Cuando h tiende a 0 , el punto Q tiende a confundirse con el P . Entonces la recta secante tiende a ser la recta tangente a la función $f(x)$ en P , y por tanto el ángulo α tiende a ser β .

$$\operatorname{tg} \beta = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{h} = f'(a)$$

Les recomiendo visionen estos dos videos para tener una mejor idea

<http://www.youtube.com/watch?v=KNRGrypBPmE>

<http://www.youtube.com/watch?v=rjmWmouaHjw>

b)

$$m = f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x + 30 \Rightarrow m' = \frac{dm}{dx} = f''(x) = 12x^2 - 48x + 36 = 12(x^2 - 4x + 3) \Rightarrow m' = 0 \Rightarrow$$

$$12(x^2 - 4x + 3) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$m'' = \frac{d^2m}{dx^2} = f'''(x) = 24x - 48 \Rightarrow \begin{cases} f'''(1) = 24 \cdot 1 - 48 = -24 < 0 \Rightarrow \text{Máxima pendiente} \\ f'''(3) = 24 \cdot 3 - 48 = 24 > 0 \Rightarrow \text{Mínima pendiente} \end{cases}$$

$$\text{En} \begin{cases} x = 3 \Rightarrow f(3) = 3^4 - 8 \cdot 3^3 + 18 \cdot 3^2 + 30 \cdot 3 + 1 = 81 - 216 + 162 + 90 + 1 = 118 \Rightarrow \text{Mínima pendiente} \\ x = 1 \Rightarrow f(1) = 1^4 - 8 \cdot 1^3 + 18 \cdot 1^2 + 30 \cdot 1 + 1 = 1 - 8 + 18 + 30 + 1 = 42 \Rightarrow \text{Máxima pendiente} \end{cases}$$

2A.- Encuentra una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = (x^2 + 1)e^x$ tal que $F(0) = 5$ **(2'5 puntos)**

a)

$$F(x) = \int (x^2 + 1)e^x dx = (x^2 + 1)e^x - \int e^x \cdot 2x dx = (x^2 + 1)e^x - 2 \int x e^x dx + K = (x^2 + 1)e^x - 2 \left[x e^x - \int e^x dx \right]$$

$$\text{Por partes} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = u \Rightarrow 2x dx = du \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{cases} \quad \begin{cases} x = u \Rightarrow dx = du \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{cases}$$

$$F(x) = (x^2 + 1)e^x - 2x e^x + 2 \int e^x dx = (x^2 + 1)e^x - 2x e^x + 2e^x = (x^2 - 2x + 3)e^x + K \Rightarrow$$

$$F(0) = 5 \Rightarrow (0^2 - 2 \cdot 0 + 3)e^0 + K = 5 \Rightarrow 3 \cdot 1 + K = 5 \Rightarrow K = 2 \Rightarrow F(x) = (x^2 - 2x + 3)e^x + 2$$

3A.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0$

a) Calcula $A \cdot A^t$, donde A^t es la matriz traspuesta de A **(1 punto)**

b) Razona que siempre existe la matriz inversa de A , independientemente de los valores

$a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0$ **(1'5 puntos)**

a)

$$A^t = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & -b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ -b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow AA^t = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & -b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ -b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

b) La condición necesaria para que una matriz tenga inversa es que su determinante no sea nulo

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -b \\ a & b & 0 \\ -b & a & 0 \end{vmatrix} = a \cdot a^3 - b \cdot (-b^3) = a^4 + b^4$$

$$\text{Si } |A| = 0 \Rightarrow a^4 + b^4 = 0 \Rightarrow a^4 = -b^4 \Rightarrow a = \sqrt[4]{-b^4} \Rightarrow \text{Sin solución real}$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } A^{-1}$$

4A.- a) Dados los planos $\pi_1 \equiv x - 2y - z = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x - y + \lambda z = 4$ **(1'25 puntos)**

a) Calcular el valor del parámetro λ para que los planos sean perpendiculares **(1 punto)**

b) Para el valor de λ obtenido en el apartado anterior, obtén unas ecuaciones paramétricas de la recta r paralela a π_1 y π_2 que pasa por el punto $P(1, 2, 3)$. **(1'5 puntos)**

a) Al ser perpendiculares los planos lo serán, también, sus vectores directores siendo su producto escalar nulo

$$\begin{cases} \vec{v}_{\pi_1} = (1, -2, -1) \\ \vec{v}_{\pi_2} = (2, -1, \lambda) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_{\pi_1} \perp \vec{v}_{\pi_2} \Rightarrow \vec{v}_{\pi_1} \cdot \vec{v}_{\pi_2} = 0 \Rightarrow (1, -2, -1) \cdot (2, -1, \lambda) = 0 \Rightarrow 2 + 2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 4$$

b) Al ser una recta paralela a los dos planos su vector director es perpendicular a los dos vectores directores del plano, hallándose como el producto vectorial de ambos. Además la recta queda definida por el punto **P** dado

$$\begin{cases} \vec{v}_{\pi_1} = (1, -2, -1) \\ \vec{v}_{\pi_2} = (2, -1, 4) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{v}_{\pi_1} \times \vec{v}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -8\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k} + 4\vec{k} - \vec{i} - 4\vec{j} = -9\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k} \Rightarrow$$
$$\vec{v}_r = (-9, -6, 3) \equiv (3, 2, -1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\mu \\ y = 2 + 2\mu \\ z = 3 - \mu \end{cases}$$

Propuesta B

1B.- Calcula el parámetro $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ para que verifique la igualdad $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{a}{x^2}}$

(2'5 puntos)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} &= \frac{\sqrt{1-0}-\sqrt{1+0}}{0} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}) \cdot (\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})}{x \cdot (\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x-(1+x)}{x \cdot (\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x-1-x}{x \cdot (\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{x \cdot (\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}} = \frac{-2}{\sqrt{1-0}+\sqrt{1+0}} = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow \\ \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}} &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}} = e^{-1} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{a}{x^2}} = (\cos 2 \cdot 0)^{\frac{a}{0^2}} = (\cos 0)^{\frac{a}{0}} = 1^\infty \Rightarrow \text{Siendo } L = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{a}{x^2}} \Rightarrow$$

$$\ln L = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{a}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln (\cos 2x)^{\frac{a}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{x^2} \ln (\cos 2x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \ln (\cos 2x)}{x^2} = \frac{a \ln (\cos 2 \cdot 0)}{0^2} = \frac{a \ln (\cos 0)}{0} =$$

$$= \frac{a \ln (1)}{0} = \frac{a \cdot 0}{0} = \frac{0}{0} = \frac{a \cdot \frac{1}{\cos 2x} \cdot 2 \cdot (-1) \cdot \sin 2x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2a \sin 2x}{2x \cos 2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-a \sin 2x}{x \cos 2x} = \frac{-a \sin 2 \cdot 0}{0 \cos 2 \cdot 0} = \frac{-a \sin 0}{0 \cos 0} = \frac{-a \cdot 0}{0 \cdot 0} = \frac{0}{0} = \frac{-2a \cos 2x}{\cos 2x + x \sin 2x} =$$

$$= \frac{-2a \cos 2 \cdot 0}{\cos 2 \cdot 0 + x \sin 2 \cdot 0} = \frac{-2a \cos 0}{\cos 0 + x \sin 0} = \frac{-2a \cdot 1}{1 + 0 \cdot 0} = -2a$$

Llevando el valor a a la igualdad del enunciado

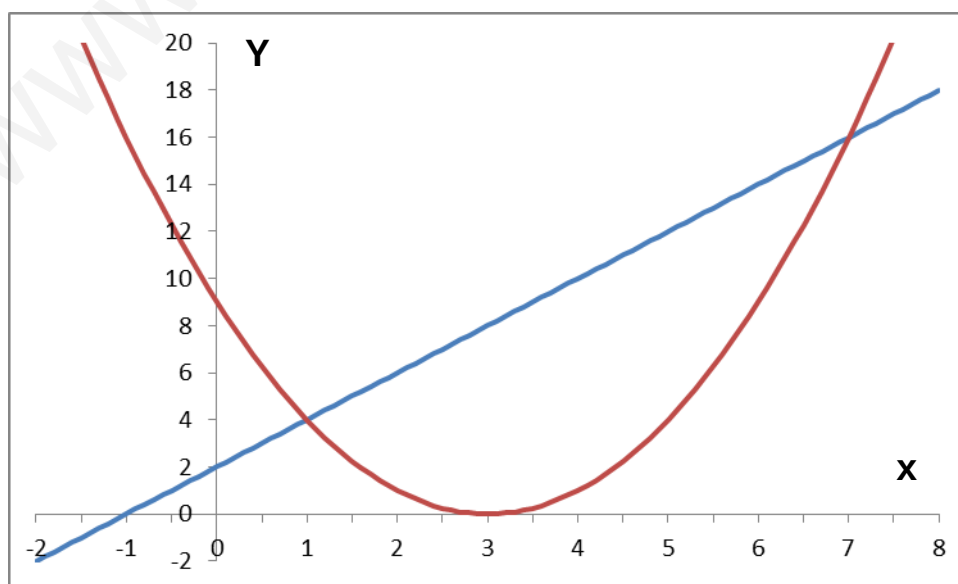
$$e^{-1} = -2a \Rightarrow a = -\frac{e^{-1}}{2} = -\frac{1}{2e}$$

2.B.- a) Esboza la región encerradas entre la parábola $f(x) = x^2 - 6x + 9$ y la recta $g(x) = 2x + 2$

(0'5 puntos)

b) Calcula el área de la región anterior **(2 puntos)**

a)



Continuación del Problema 2B

b)

$$\text{Puntos de corte con OX} \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3 \\ 2x + 2 = 0 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

$$\text{Puntos de corte entre funciones} \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 2x + 2 \Rightarrow x^2 - 8x + 7 = 0 \Rightarrow \Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 64 - 28 = 36 \geq 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{8+6}{2} = 7 \\ x = \frac{8-6}{2} = 1 \end{cases}$$

$$A = \int_1^7 (2x+2) dx - \int_1^7 (x^2 - 6x + 9) dx = \int_1^7 (-x^2 + 8x - 7) dx = -\frac{1}{3} \cdot [x^3]_1^7 + 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_1^7 - 7 \cdot [x]_1^7$$

$$A = -\frac{1}{3} \cdot (7^3 - 1^3) + 4 \cdot (7^2 - 1^2) - 7 \cdot (7 - 1) = -\frac{342}{3} + 188 - 42 = 188 - 42 - 114 = 32 u^2$$

3B.- Un grupo de amigos se reúnen cada sábado en la misma cafetería. Hace dos sábados tomaron 4 cafés, 6 refrescos y 2 infusiones, siendo el precio total de 15'40 euros. El sábado pasado tomaron 5 cafés, 4 refrescos y 3 infusiones, siendo el precio total de 14'40 euros. Hoy sábado han pedido 3 cafés, 8 refrescos y 1. Cuando piden la cuenta, el camarero les dice que el precio total de 18 euros

Se pide:

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales con los datos del enunciado anterior **(1 punto)**

b) Asumiendo que los dos sábados anteriores los precios totales están bien calculados y que los precios de los cafés, refrescos e infusiones no han cambiado, razona que hay un error en la cuenta de este sábado **(1'5 puntos)**

a) Siendo **C** el precio del café, **R** el del refresco e **I** el de las infusiones

$$\begin{cases} 4C + 6R + 2I = 15'40 \\ 5C + 4R + 3I = 14'40 \\ 3C + 8R + I = 18 \end{cases}$$

b) El sistema resultará incompatible

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & | & 15'40 \\ 5 & 4 & 3 & | & 14'40 \\ 3 & 8 & 1 & | & 18 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & | & 7'70 \\ 5 & 4 & 3 & | & 14'40 \\ 3 & 8 & 1 & | & 18 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & | & 7'70 \\ -10 & -8 & -6 & | & -28'80 \\ -6 & -16 & -2 & | & -36 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & | & 7'70 \\ 0 & 7 & -1 & | & 9'70 \\ 0 & -7 & 1 & | & -12'90 \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & | & 7'70 \\ 0 & 7 & -1 & | & 9'70 \\ 0 & 0 & 0 & | & -3'20 \end{pmatrix} \Rightarrow 0I = -3'20 \Rightarrow I = -\frac{3'20}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

4.B.- Dadas las rectas $r \equiv \frac{x}{2} = y + 1 = \frac{z-1}{3}$ y $s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

- a) Estudia su posición relativa **(1'25 puntos)**
 b) Calcula la distancia entre r y s **(1'25 puntos)**

a) Analizaremos si las rectas tienen un punto común, de tenerlo estudiaremos si los vectores directores son iguales o proporcionales, si este caso se da, las rectas son coincidentes, de no darse este último supuesto las rectas se cortan en un punto, son secantes.

Si no tienen punto común, y hay igualdad o proporcionalidad entre los vectores directores las rectas son paralelas, de no haberlo las rectas se cruzan en el espacio

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = 2\mu \\ y = -1 + \mu \\ z = 1 + 3\mu \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R} \\ s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\mu = \lambda \\ -1 + \mu = \lambda \\ 1 + 3\mu = 1 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\mu - \lambda = 0 \\ \mu - \lambda = 1 \\ 3\mu + \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$0z = 5 \Rightarrow z = \frac{5}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible} \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(A/B) = 3$$

No son coincidentes ni secantes (se cortan en un punto)

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (2, 1, 3) \\ \vec{v}_s = (1, 1, -1) \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{1} \neq \frac{1}{1} \Rightarrow \text{No son iguales ni proporcionales} \Rightarrow \text{No son rectas paralelas}$$

Por lo tanto las rectas r y s se cruzan en el espacio

- b) Para hallar la distancia entre las dos rectas hallaremos un plano π que contenga a la recta s y sea paralela a r , que será determinado por los vectores directores de ambas rectas y por el vector $\overrightarrow{SG}$, siendo S un punto cualquiera de la recta s (tomaremos el indicado en su ecuación) y G el punto genérico del plano que se busca. Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector $\overrightarrow{SG}$ es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano.

Una vez hallado el plano π hallaremos la distancia de un punto R cualquiera de la recta r (tomaremos el indicado en su ecuación) al plano que es la distancia que existe entre las rectas r y s .

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (2, 1, 3) \\ \vec{v}_s = (1, 1, -1) \\ \overrightarrow{SG} = (x, y, z) - (0, 0, 1) = (x, y, z-1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x + 3y + 2(z-1) - (z-1) - 3x + 2y = 0$$

$$-4x + 5y + (z-1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv 4x - 5y - z + 1 = 0$$

$$R(0, -1, 1) \Rightarrow d(r, s) = d(R, \pi) = \frac{|4 \cdot 0 - 5 \cdot (-1) - 1 + 1|}{\sqrt{(4)^2 + (-5)^2 + (-1)^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{42}} = \frac{5\sqrt{42}}{42} u$$