

Propuesta A

1A. a) Calcula siguientes límites: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{xe^{\sin x}}$, $\lim_{x \rightarrow 0} (1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x+\sin x}}$ **(1,25 puntos cada límite)**

Nota: $\operatorname{tg} x$ denota a la tangente de x

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{xe^{\sin x}} &= \frac{\ln(1+2 \cdot 0)}{0 \cdot e^{\sin 0}} = \frac{\ln(1+0)}{0 \cdot e^0} = \frac{\ln 1}{0 \cdot 1} = \frac{0}{0} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{e^{\sin x} + x \cdot \cos x \cdot e^{\sin x}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{e^{\sin x} (1+x \cdot \cos x)} = \frac{2}{e^{\sin 0} (1+0 \cdot \cos 0)} = \frac{2}{e^0 (1+0 \cdot 1)} = \frac{2}{1 \cdot (1+0)} = 2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x+\sin x}} &= (1+\operatorname{tg} 0)^{\frac{1}{0+\sin 0}} = (1+0)^{\frac{1}{0+0}} = 1^\infty \Rightarrow \text{Llamando } L = \lim_{x \rightarrow 0} (1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x+\sin x}} \Rightarrow \\ \ln L &= \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x+\sin x}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left[(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x+\sin x}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+\sin x} \cdot \ln(1+\operatorname{tg} x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\operatorname{tg} x)}{x+\sin x} = \\ &= \frac{\ln(1+\operatorname{tg} 0)}{0+\sin 0} = \frac{\ln(1+0)}{0+0} = \frac{\ln 1}{0} = \frac{0}{0} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{1+\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{1+\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{\cos^2 x \cdot (1+\operatorname{tg} x)(1+\cos x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{\cos^2 x \cdot (1+\operatorname{tg} 0)(1+\cos 0)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{1^2}}{1^2 \cdot (1+0) \cdot (1+1)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{1 \cdot 1}}{1 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \ln L = \frac{1}{2} \Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow 0} (1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x+\sin x}} = e^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

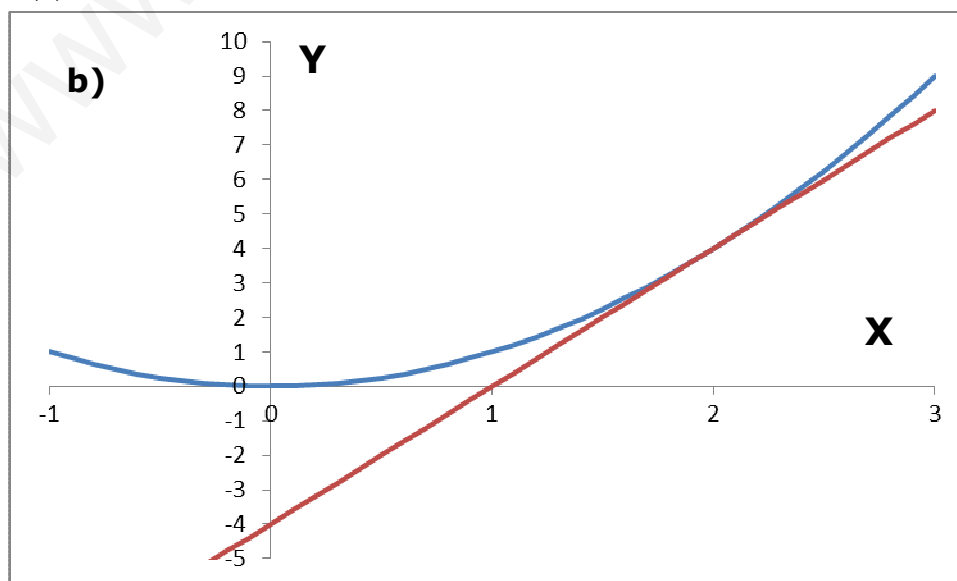
2A. a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$. **(0,5 puntos)**

b) Esboza la región encerrada entre las gráficas de $f(x)$, la recta calculada en el apartado a) y el eje de ordenadas. **(0,5 puntos)**

c) Calcula el área de la región anterior. **(1,5 puntos)**

a)

$$y' = 2x \Rightarrow \begin{cases} y(2) = 2^2 = 4 \\ y'(2) = 2 \cdot 2 = 4 \end{cases} \Rightarrow y - 4 = 4(x - 2) \Rightarrow y - 4 = 4x - 8 \Rightarrow y = 4x - 4 \Rightarrow 4x - y - 4 = 0$$



Continuación Problema 2A de la opción A

c)

$$\text{Puntos de corte con } OX \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 4x - 4 = 0 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

Sabiendo que la ecuación del eje OY es $x = 0$

$$\text{Puntos de corte entre funciones} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 4 = x^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow \\ x = 0 \Rightarrow 0 = 4 \cdot x - 4 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow y = -1 \end{cases}$$

$$A = \int_0^2 x^2 dx - \int_0^2 (4x - 4) dx + \left| \int_0^1 (4x - 4) dx \right| = \int_0^2 (x^2 - 4x + 4) dx - \int_0^1 (4x - 4) dx$$

$$A = \frac{1}{3} \cdot [x^3]_0^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_0^2 + 4 \cdot [x]_0^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_0^1 + 4 \cdot [x]_0^1$$

$$A = \frac{1}{3} \cdot (2^3 - 0^3) - 2 \cdot (2^2 - 0^2) + 4 \cdot (2 - 0) - 2 \cdot (1^2 - 0^2) + 4 \cdot (1 - 0) = \frac{8}{3} - 8 + 8 - 2 + 4 = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3} u^2$$

3A. a) Enuncia el Teorema de Rouché-Frobenius. (0,5 puntos)

$$\text{b) Razona que el sistema de ecuaciones lineales} \begin{cases} x + 3y - 3z = 4 \\ 2x - y + z = 1 \\ 3x + 2y - az = 5 \end{cases}$$

no es incompatible para ningún valor $a \in \mathbb{R}$. **(1 punto)**c) Resuelve el sistema en el caso en que sea compatible indeterminado. **(1 punto)****a) Teorema de Rouché-Frobenius**

Un sistema de ecuaciones lineales, **S**, es compatible sí, y solo sí, el rango de la matriz de los coeficientes, **A**, es igual al rango de la matriz ampliada **A/B**; es decir: **S es compatible** $\Leftrightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A/B)$

b)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & -7 & 9-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 2-a \end{vmatrix} = 7 \cdot (2-a) \Rightarrow \text{Si } A=0 \Rightarrow 7 \cdot (2-a)=0 \Rightarrow 2-a=0 \Rightarrow a=2$$

$$\forall a \in \mathbb{R} - \{2\} \Rightarrow A \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$

Si $a = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 5 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 2 < \text{Número incógnitas} \Rightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

El sistema es **Compatible** para todo valor $a \in \mathbb{R}$

4A. Dada la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - z = 1 \end{cases}$ **(1,25 puntos)**

- a) Da la ecuación implícita del plano π perpendicular a r que pasa por el punto $P(2, 1, 1)$. **(1,25 puntos)**
 b) Halla el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen de coordenadas y los tres puntos que resultan al hacer la intersección de π con los ejes coordenados. **(1,25 puntos)**

a) El plano buscado π como vector director el de la recta r , que es perpendicular al vector $\overrightarrow{PG}$, siendo G el punto genérico del plano, siendo el producto escalar, de ambos vectores, nulo y la ecuación pedida del plano

$$3x - y = 4 \Rightarrow y = 3x - 4 \Rightarrow x - z = 1 \Rightarrow z = x - 1 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -4 + 3\lambda \Rightarrow v_r \equiv (1, 3, 1) \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = \overrightarrow{v_r} = (1, 3, 1) \\ \overrightarrow{PG} = (x, y, z) - (2, 1, 1) = (x - 2, y - 1, z - 1) \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{PG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{PG} = 0 \Rightarrow \\ (1, 3, 1) \cdot (x - 2, y - 1, z - 1) = 0 \Rightarrow x - 2 + 3y - 3 + z - 1 = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + 3y + z - 6 = 0 \end{cases}$$

b) Hallaremos los puntos de corte **A**, **B** y **C** del plano hallado en a) con los ejes coordenados
 Un sexto del producto mixto (escalar y vectorial) de los vectores **OA**, **OB** y **OC** es el Volumen pedido

$$\begin{cases} OX \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \Rightarrow \pi \equiv \alpha + 3 \cdot 0 + 0 - 6 = 0 \Rightarrow \alpha - 6 = 0 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow A \begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \Rightarrow A(6, 0, 0) \\ z = 0 \end{cases} \\ z = 0 \end{cases} \\ OY \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = \beta \Rightarrow \pi \equiv 0 + 3 \cdot \beta + 0 - 6 = 0 \Rightarrow 3 \cdot \beta - 6 = 0 \Rightarrow 3 \cdot \beta = 6 \Rightarrow \beta = 2 \Rightarrow B \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \Rightarrow B(0, 2, 0) \\ z = 0 \end{cases} \\ z = 0 \end{cases} \\ OZ \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \Rightarrow \pi \equiv 0 + 3 \cdot 0 + \gamma - 6 = 0 \Rightarrow \gamma - 6 = 0 \Rightarrow \gamma = 6 \Rightarrow C \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \Rightarrow C(0, 0, 6) \\ z = 6 \end{cases} \\ z = \gamma \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} = (6, 0, 0) - (0, 0, 0) = (6, 0, 0) \\ \overrightarrow{OB} = (0, 2, 0) - (0, 0, 0) = (0, 2, 0) \\ \overrightarrow{OC} = (0, 0, 6) - (0, 0, 0) = (0, 0, 6) \end{cases} \Rightarrow V = \frac{1}{6} \cdot \left| \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}) \right| \Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}) = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 72 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{6} \cdot 72 = 12 u^3$$

Propuesta B

1B. Determina como dividir un segmento de **90 cm** en dos trozos, de forma que la suma del área del semicírculo cuyo diámetro es uno de ellos y el área de un triángulo rectángulo que tiene como base el otro trozo y cuya altura es π veces su base, sea mínima. **(2.5 puntos)**

Nota: Recuerda que el área de un círculo de radio r es πr^2

Siendo r el radio del semicírculo y L el lado del triángulo rectángulo

$$\begin{cases} 90 = 2r + L \Rightarrow L = 90 - 2r \\ A = \frac{\pi r^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot L \cdot \pi \cdot L = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (r^2 + L^2) \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot [r^2 + (90 - 2r)^2] = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (r^2 + 8100 - 360r + 4r^2) \end{cases}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (5r^2 - 360r + 8100) = \frac{5}{2} \cdot \pi \cdot (r^2 - 72r + 1620) \Rightarrow A' = \frac{dA}{dr} = \frac{5}{2} \cdot \pi \cdot (2r - 72) = 5\pi \cdot (r - 36) \Rightarrow$$

$$\text{Si } A' = 0 \Rightarrow 5\pi \cdot (r - 36) = 0 \Rightarrow r - 36 = 0 \Rightarrow r = 36 \Rightarrow A'' = \frac{d^2A}{dr^2} = 5\pi > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \text{Trozo 1} = 2 \cdot r = 2 \cdot 36 = 72 \text{ cm} \\ \text{Base} = L = 90 - 72 = 18 \text{ cm} \end{cases}$$

2B.- Calcula las integrales $\int \frac{1}{\sqrt{x}} (4x^3 - \sqrt[4]{x}) dx$, $\int x \ln x dx$ **(1,25 puntos por cada integral)**

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} (4x^3 - \sqrt[4]{x}) dx = 4 \int \frac{x^3}{\sqrt{x}} dx - \int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx = 4 \int \frac{x^3}{x^{\frac{1}{2}}} dx - \int \frac{x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}} dx = 4 \int x^{3-\frac{1}{2}} dx - \int x^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}} dx = 4 \int x^{\frac{5}{2}} dx - \int x^{-\frac{1}{4}} dx =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} (4x^3 - \sqrt[4]{x}) dx = 4 \cdot \frac{1}{\frac{5}{2}+1} \cdot x^{\frac{5}{2}+1} - \frac{1}{-\frac{1}{4}+1} \cdot x^{\frac{1}{4}+1} = 4 \cdot \frac{1}{\frac{7}{2}} \cdot x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{5}{4}} = \frac{8}{7} \cdot \sqrt{x^7} - \frac{4}{3} \cdot \sqrt[4]{x^3}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} (4x^3 - \sqrt[4]{x}) dx = \frac{8}{7} \cdot x^3 \sqrt{x} - \frac{4}{3} \cdot \sqrt[4]{x^3} + K$$

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 = \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) = \frac{x^2}{4} (2 \ln x - 1) + K$$

$$\text{Por partes} \Rightarrow \begin{cases} \ln x = u \Rightarrow \frac{dx}{x} = du \\ x dx = dv \Rightarrow v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

3B. a) Despeja X en la ecuación matricial $A \cdot X - A = 2A^2$, donde A y X son matrices cuadradas de orden 3. **(1 punto)**

b) Calcula X , siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **(1 punto)**

c) Calcula los determinantes de las matrices A^{101} y A^{1000} . **(0,5 puntos)**

a)

$$A \cdot (X - I) = 2A^2 \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot (X - I) = A^{-1} \cdot 2A^2 \Rightarrow I \cdot (X - I) = 2 \cdot A^{-1}A^2 \Rightarrow X - I = 2A \Rightarrow X = 2A + I$$

b)

$$2A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = 2A + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c)

$$\text{Siendo } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow \begin{cases} |A^{101}| = |A|^{101} = (-1)^{101} = -1 \\ |A^{1000}| = |A|^{1000} = (-1)^{1000} = 1 \end{cases}$$

4B. Dados el plano $\pi \equiv x + ay + 3z = 2$, $a \in \mathbb{R}$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

a) Halla a para que π y r se corten perpendicularmente. **(1,25 puntos)**.

b) Halla a para que π y r sean paralelos. **(1,25 puntos)**.

a) Los vectores directores de la recta y el plano que cumplen la condición de perpendicularidad son iguales o proporcionales

$$y = 2x \Rightarrow x - 4x + z = -1 \Rightarrow z = -1 + 3x \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_\pi = (1, a, 3) \\ \vec{v}_r = (1, 2, 3) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{3}{3} = \frac{a}{2} \Rightarrow a = 2$$

b) Si la recta y el plano son paralelos sus vectores directores son perpendiculares y, por ello, su producto escalar es nulo.