Universidad de Castilla la Mancha – Septiembre 2.017

Propuesta A

1 A.-

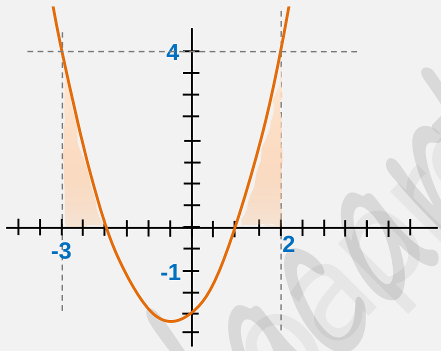
a) Calcula razonadamente el área de la región determinada por la curva $f(x) = (x-1)(x+2)$, las rectas $x = -3$, $x = 2$ y el eje de abscisas. Esboza dicha región.

b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f(x) en el punto de abscisa $x = 2$.

Primero calculamos el vértice:

$$V_x = \frac{-2b}{a} = -\frac{1}{2} \rightarrow V_y = -\frac{9}{4} \rightarrow V = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right) \approx (-0.5, -2.25)$$

Los puntos de corte con el eje de abscisas nos lo da el enunciado: (1, 0) y (-2, 0). La gráfica de la función $f(x) = x^2 + x - 2$, queda:



El área total será la suma de las dos áreas pequeñas:

$$A = \int_{-3}^{-2} x^2 + x - 2\,dx + \int_{1}^{2} x^2 + x - 2\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2\right]_{-3}^{-2} + \left[\frac{x^3}{3} + x^2\right]_{1}^{2} = \left(-\frac{8}{3} + 4 + 9 - 9\right) + \left(\frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{3} - 1\right) \rightarrow \boldsymbol{A} = \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{u^2}$$

La ecuación de la recta tangente tiene la expresión: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Según nos dice el enunciado, $x_0 = 2$. Calculamos la derivada de la función, y después calcularemos la pendiente de la recta sustituyendo el valor de x_0 en dicha derivada:

$$f'(x) = 2x + 1 \rightarrow \boldsymbol{f'(2) = 5}$$

Ahora calculamos la ordenada correspondiente a x_0:

$$f(2) = 2^2 + 2 - 2 \rightarrow \boldsymbol{f(2) = 4}$$

Por lo que la ecuación de la recta tangente queda:

$$y - 4 = 5(x - 2) \rightarrow \boldsymbol{y = 5x + 6}$$

2 A.-

a) Determina el valor de k ∊ R para que la siguiente función sea continua en $x = 0$. $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{1/x} & si\ x < 0 \\ 6x + k & si\ x \geq 0 \end{cases}$

b) Enuncia el teorema de Bolzano y comprueba si la ecuación $\cos x = 2 - x$ tiene alguna solución real en el intervalo $[0;\ 2\pi]$.

Para que $f(x)$ sea continua en x = 0, se tiene que cumplir que: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{1/x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x}\left(\frac{x+1}{2x+1} - 1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x}\left(\frac{-x}{2x+1}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-x}{2x^2+x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-x}{x(2x+1)}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-1}{(2x+1)}} = e^{-1} = \boldsymbol{\frac{1}{e}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (6x + k) = \boldsymbol{k}$$

$$f(0) = \boldsymbol{k}$$

Igualando, nos queda:

$$k = \frac{1}{e}$$

Teorema de ***Bolzano***.- si f(x) es continua en el intervalo [a, b] y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo [signo f(a) ≠ signo f(b)], entonces existe al menos, un punto c ∈ (a, b) tal que f(c) = 0.

Para comprobar que la ecuación tiene al menos una solución real dentro del intervalo $[0;\ 2\pi]$, trabajamos con la función diferencia y luego vemos si se cumple Bolzano:

$$\cos x \ = \ 2 - x \rightarrow d(x) = \cos x - 2 + x$$

La función es continua en el intervalo $[0;\ 2\pi]$, ya que su dominio es el conjunto de los números reales.

Por último, comprobamos que el signo de la función en los extremos del intervalo estudiado, sea distinto:

$$\begin{cases} d(0) = \ \cos 0 - 2 + 0 \rightarrow \ \boldsymbol{f(0) \ = \ -1} \\ d(2\pi) = \ \cos 2\pi - 2 + 2\pi \rightarrow \ \boldsymbol{f(2\pi) = 5.28} \end{cases}$$

Por tanto, se cumple Bolzano, es decir, existe al menos un punto c ∈ (0, 2π) tal que f(c) = 0, siendo c una solución real de la ecuación en dicho intervalo.

3 a.-

a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro a ∈ R $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 0 \\ x + y + az = 0 \end{cases}$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a \ = \ 0$.

Para discutir el sistema de ecuaciones empleamos el teorema de Rouché Frobenius: "la condición necesaria y suficiente para que un sistema de m ecuaciones y n incógnitas tenga solución, es que el rango de la matriz de los coeficientes y el de la matriz ampliada sean iguales".

Siendo M la matriz de los coeficientes y M* la matriz ampliada:

- Si Rg(M) = Rg(M*) = nº incógnitas → Sistema compatible determinado
- Si Rg(M) = Rg(M*) ≠ nº incógnitas → Sistema compatible indeterminado
- Si Rg(M) ≠ Rg(M*) → Sistema incompatible

$$|M| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2 \rightarrow a^3 - 3a + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{a_1 = 1} \\ \boldsymbol{a_2 = 1} \\ \boldsymbol{a_3 = -2} \end{cases} \rightarrow \ \forall \boldsymbol{a \in R - \{-2, 1\}: Rg(M) = 3}$$

Si a = 1:

$$|M^*| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \\ 1 & 1 & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{0} \rightarrow \ \boldsymbol{a = 1: Rg(M^*) = 2}$$

Si a = -2:

$$|M^*| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow |det| = |C_1, C_2, C_4| = \boldsymbol{3} \rightarrow \ \boldsymbol{a = -2: Rg(M^*) = 3}$$

Por tanto:

- ∀ a ∈ R – {-2, 1}: Rg(M) = Rg(M*) = nº incógnitas = 3 SCD
- Si a = 1: Rg(M) = 1 ≠ Rg(M*) = 2 ≠ nº incógnitas SI
- Si a = -2: Rg(M) = 2 ≠ Rg(M*) = 3 SI

Para a = 0, el sistema es compatible determinado, lo resolvemos por Gauss:

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ x + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & | 1 \\ 1 & 0 & 1 & | 0 \\ 1 & 1 & 0 & | 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | 0 \\ 0 & 1 & 1 & | 1 \\ 1 & 1 & 0 & | 0 \end{pmatrix} \underset{E_3 = E_1 - E_3}{\rightarrow} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | 0 \\ 0 & 1 & 1 & | 1 \\ 0 & -1 & 1 & | 0 \end{pmatrix} \underset{E_3 = E_2 + E_3}{\rightarrow}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | 0 \\ 0 & 1 & 1 & | 1 \\ 0 & 0 & 2 & | 1 \end{pmatrix} \rightarrow z = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{2} = 0 \\ y + \frac{1}{2} = 1 \end{cases} \rightarrow x = -\frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2} \rightarrow Solución = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

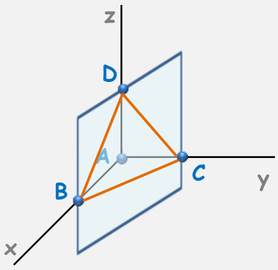
4 a.- Dados los planos $\alpha \equiv -x + 2y + z + 2 = 0$ y $\beta \equiv -2y + z = 0$

a) Calcula razonadamente el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas y los puntos de intersección del plano α con los tres ejes coordenados.
b) Encuentra razonadamente la ecuación general o implícita de la recta paralela a los planos α y β que pase por el punto P(0,-1,3).

Un vértice del tetraedro ya lo tenemos A (0, 0, 0). Los otros tres vértices tenemos que hallarlos como los puntos de intersección de los tres ejes coordenados con el plano α:

- Eje x → y = 0, z = 0 → -x + 2 = 0 → x = 2 → B (2, 0, 0)
- Eje y → x = 0, z = 0 → 2y + 2 = 0 → y = -1 → C (0, -1, 0)
- Eje z → x = 0, y = 0 → z + 2 = 0 → z = -2 → D (0, 0, -2)

El tetraedro queda como sigue:



Por último, calculamos el volumen del tetraedro utilizando el producto mixto:

$$V = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right|}{6} = \frac{\left\| \begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{matrix} \right\|}{6} = \frac{4}{6} \rightarrow \boldsymbol{V = \frac{2}{3}u^3}$$

Si la recta r es paralela a los planos α y β, su vector director será perpendicular a los vectores normales de los dos planos. Por lo que podemos calcular el vector director de la recta r como el producto vectorial de los vectores normales de ambos planos:

$$\begin{matrix} \vec{n}_\alpha = (-1, 2, 1) \\ \vec{n}_\beta = (0, -2, 1) \end{matrix} \rightarrow \vec{d}_r = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\vec{d}_r = (0, 1, 2)}$$

El punto de la recta nos lo da el enunciado, por lo que la ecuación general de la recta será, partimos de la ecuación continua:

$$\frac{x}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{2} \rightarrow \begin{matrix} \frac{x}{0} = \frac{y+1}{1} \\ \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{2} \end{matrix} \rightarrow \boldsymbol{r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ 2y - z + 5 = 0 \end{cases}}$$

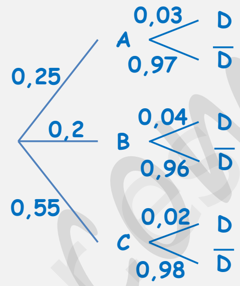
5 a.-

a) En una empresa hay tres robots A, B y C dedicados a soldar componentes electrónicos en placas de circuito impreso. El 25% de los componentes son soldados por el robot A, el 20% por el B y el 55% por el C. Se sabe que la probabilidad de que una placa tenga un defecto de soldadura es de 0,03 si ha sido soldado por el robot A, 0,04 por el robot B y 0,02 por el robot C.
   a. Elegida una placa al azar, calcula razonadamente la probabilidad de que tenga un defecto de soldadura.
   b. Se escoge al azar una placa y resulta tener un defecto de soldadura, calcula razonadamente la probabilidad de que haya sido soldada por el robot C.
b) Lanzamos cinco veces una moneda trucada. La probabilidad de obtener cara es 0,6. Calcula razonadamente la probabilidad de:
   a. Obtener exactamente tres caras.
   b. Obtener más de tres caras.

n	k \ P	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

Para responder a las preguntas del apartado a), hacemos un diagrama de árbol. Si llamamos a los sucesos:

- A = "soldado por el robot A"
- B = "soldado por el robot B"
- C = "soldado por el robot"
- D = "que el componente sea defectuoso"
- $\overline{D}$ = "que el componente no sea defectuoso"



Para calcular la probabilidad de que sea defectuosa, usamos el teorema de la probabilidad total:

$$P(D) = P(A) \cdot P(D|A) + P(B) \cdot P(D|B) + P(C) \cdot P(D|C) = 0.25 \cdot 0.03 + 0.2 \cdot 0.04 + 0.55 \cdot 0.02 \rightarrow \boldsymbol{P(D) = 0.0265}$$

Para calcular la probabilidad de que siendo defectuosa haya sido soldada por el robot C, empleamos la probabilidad condicionada y el teorema de Bayes:

$$P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|C) \cdot (PC)}{P(D)} = \frac{0.02 \cdot 0.55}{0.0265} \rightarrow \boldsymbol{P(C|D) = 0.415}$$

En el apartado b) empleamos la tabla de la distribución Binomial. Para ello tenemos que designar la variable X = "sacar cruz", que sigue una distribución binomial: $Bin\ (n, p)$.
Además, la probabilidad de sacar 3 caras será la misma que de sacar 2 cruces y la probabilidad de sacar más de 3 caras será la misma que la de sacar 3 o menos cruces:

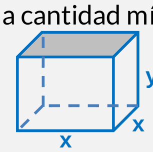
$$\boldsymbol{X \sim Bin\ (5, 0.4)}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{P(X = 2) = 0.3456} \\ P(X \leq 3) = 1 - P(X > 3) = 1 - [P(X = 4) + P(X = 5)] = 1 - (0.0768 + 0.0102) \rightarrow \boldsymbol{P(X \leq 3) = 0.913} \end{cases}$$

Si empleamos la variable X = "sacar cara", la $p = 0.6$ y no podríamos usar la tabla, ya que esta llega hasta una $P = 0.5$

Propuesta B

1 B.- Halla razonadamente las dimensiones más económicas de una piscina de 32 m^3 con un fondo cuadrado, de manera que la superficie de sus paredes y el suelo necesiten la cantidad mínima de material.



La función a optimiza (minimizar) es el área lateral y de la base:

$$A(x, y) = A_{base} + A_{lateral} \rightarrow \boldsymbol{A(x, y) = x^2 + 4xy}$$

Usamos el volumen de la piscina para poner una variable en función de la otra:

$$V(x) = A_{base}\ h \rightarrow 32 = x^2 \cdot y \rightarrow \boldsymbol{y = \frac{32}{x^2}} \rightarrow A(x) = x^2 + 4x\frac{32}{x^2} \rightarrow \boldsymbol{A(x) = x^2 + \frac{128}{x}}$$

$$A'(x) = 2x - \frac{128}{x^2} \rightarrow \boldsymbol{A'(x) = 0} \rightarrow 2x - \frac{128}{x^2} = 0 \rightarrow \boldsymbol{x = 4m}$$

$$A''(x) = 2 + \frac{256}{x^3} \rightarrow A''(4) = 6 > 0 \rightarrow \boldsymbol{Mínimo} \rightarrow \boldsymbol{y = 2\ m}$$

Con lo que las dimensiones de la piscina son **4x4x32**.

2 B.- Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x^3+2x^2+x-10}{x^2+x-2}\,dx$

b) $\int x^2\,Lnx\,dx$

La primera es una integral racional:

$$\int \frac{x^3+2x^2+x-10}{x^2+x-2}\,dx \to \frac{x^3+2x^2+x-10}{x^2+x-2} = \frac{x^3+2x^2+x-10}{(x-1)(x+2)} \to \frac{x^3+2x^2+x-10}{x^2+x-2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+2)}$$

$$\to \frac{x^3+2x^2+x-10}{x^2+x-2} = \frac{A\,(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)} \to x^3+2x^2+x-10 = A\,(x+2)+B(x-1)$$

$$\to \begin{cases} x=-2 \to -12=-3B \to \boldsymbol{B=4} \\ x=1 \to -6=3A \to \boldsymbol{A=-2} \end{cases}$$

$$I = \int \frac{-2}{x-1}\,dx + \int \frac{4}{x+2}\,dx \to \boldsymbol{I = -2Ln|x-1| + 4Ln|x+2|}$$

La segunda la hacemos por partes:

$$\int x^2\,Lnx\,dx \to \begin{matrix} u = Lnx \to du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^2dx \to v = \frac{x^3}{3} \end{matrix} \to I = Lnx \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^3\,Lnx}{3} - \int \frac{x^2}{3}dx \to \boldsymbol{I = \frac{x^3\,Lnx}{3} - \frac{x^3}{9}}$$

3 B.- Dadas matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente A^{-1}

b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $A \cdot X + B = C^2$

Calculamos la inversa de A mediante Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to F_2 = F_2 - F_3 \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Por lo que la matriz inversa de A será:

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$$

Primero despejamos X de la ecuación:

$$A \cdot X + B = C^2 \to A \cdot X = C^2 - B \to A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1}\,(C^2 - B) \to I \cdot X = A^{-1}\,(C^2-B) \to \boldsymbol{X = A^{-1}\,(C^2 - B)}$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \boldsymbol{C^2} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{4} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{9} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{-2} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$$

$$C^2 - B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \boldsymbol{C^2 - B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2} & \boldsymbol{4} & \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{10} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{-2} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 10 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{10} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{5} & \boldsymbol{6} & \boldsymbol{-2} \\ \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{-2} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$$

4 B.-

a) Halla razonadamente el valor de a ∊ R para el cual el plano $\alpha \equiv x - y - az + 5 = 0$ es paralelo a la recta $r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{2}$

b) Calcula razonadamente la distancia del punto P(1, 2, 3) a la recta $r \equiv \frac{x-3}{2} = y - 1 = z$

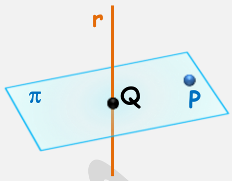
Si el plano tiene que ser paralelo a la recta, su vector normal será perpendicular al vector normal de la recta. Por lo que podemos emplear el producto escalar, ya que cuando dos vectores son perpendiculares su producto escalar es nulo:

$$\begin{matrix} \vec{n}_\alpha = (1,-1,-a) \\ \vec{d}_r = (3,-5,2) \end{matrix} \rightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{d}_r \rightarrow \vec{n}_\alpha \cdot \vec{d}_r = 0 \rightarrow (1,-1,-a)\cdot(3,-5,2) = 0 \rightarrow 3+5-2a = 0 \rightarrow \boldsymbol{a = 4}$$

Para calcular la distancia entre el punto P y la recta r, primero hallamos un plano π perpendicular a r que contenga a P.

Después calculamos el punto Q como intersección del plano π con la recta r.

Por último, calculamos la distancia entre los puntos Q y P.



El vector normal del plano π es el vector director de la recta r. Para deducir la ecuación del plano usamos la ecuación normal del plano:

$$\vec{d}_r = (2,1,1) \rightarrow \pi \equiv 2(x-1) + 1(y-2) + 1(z-3) = 0 \rightarrow \boldsymbol{\pi \equiv 2x + y + z - 7 = 0}$$

Para hallar el punto Q, sustituimos las coordenadas genéricas de r en la ecuación de π. Para ello necesitamos las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \pi \equiv 2(3+2\lambda) + (1+\lambda) + \lambda - 7 = 0 \rightarrow \lambda = 0$$

Ahora sustituimos λ en las coordenadas genéricas de r:

$$\boldsymbol{Q = (3,1,0)}$$

Por último, la distancia entre dos puntos es igual al módulo del vector que forman:

$$d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(3-1)^2 + (1-2)^2 + (0-3)^2} \rightarrow \boldsymbol{d(P,r) = d(P,Q) = \sqrt{14}\, u}$$

5 B.-

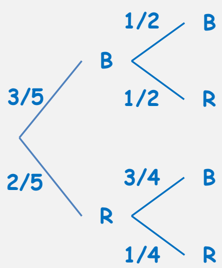
a) De una urna que contiene tres bolas blancas y dos bolas rojas extraemos, sucesivamente y sin reemplazamiento, dos bolas. Calcula razonadamente la probabilidad de:
   a. Que la segunda bola extraída sea blanca.
   b. Si la segunda bola extraída ha sido blanca, que la primera fuera roja.

b) El tiempo de duración de las llamadas telefónicas a cierta centralita se distribuye según una distribución normal de media 5 minutos y varianza 4. Calcula razonadamente:
   a. La probabilidad de que una llamada dure menos de 4,5 minutos.
   b. El tiempo de duración que no es superado por el 33% de las llamadas.

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

Para responder a las preguntas del apartado a), hacemos un diagrama de árbol. Si llamamos a los sucesos:

- B = “sacar bola blanca”
- R = “sacar bola roja”



Para calcular la probabilidad de que el libro elegido sea de matemáticas, usamos el teorema de la probabilidad total:

$$P(2^{a}\,B) = P(B)\cdot P(B|B) + P(R)\cdot P(R|B) = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} \rightarrow \boldsymbol{P(2^{a}\,B) = 0.5}$$

Para calcular la probabilidad de que siendo de matemáticas, sea de la estantería B, empleamos la probabilidad condicionada y el teorema de Bayes:

$$P(1^{a}\,R|2^{a}\,B) = \frac{P(1^{a}\,R \cap 2^{a}\,B)}{P(2^{a}\,B)} = \frac{P(2^{a}\,B|1^{a}\,R) \cdot P(1^{a}\,R)}{P(M)} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}}{0.5} \rightarrow \boldsymbol{P(1^{a}\,R|2^{a}\,B) = 0.6}$$

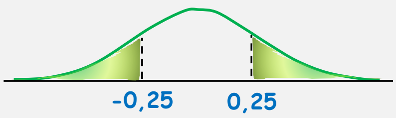
En el apartado b) empleamos la distribución Normal.
Si designamos la variable X = "duración de las llamadas", sigue una distribución normal: $N\ (\mu, \sigma)$

$$\boldsymbol{X \sim N\ (5, 2)}$$

La probabilidad de que una llamada dure menos de 4.5 minutos será:

$$P(X < 4.5) \xrightarrow{Tipificamos} P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{4.5-5}{2}\right) = P(Z < -0.25)$$

Si nos fijamos en la curva de la distribución normal tipificada vemos como, al ser el área debajo de la curva igual a 1:



$$P(Z < -0.25) = 1 - P(X > 0.25) \xrightarrow{Suceso\ Contrario} 1 - \left[1 - P(x < 0.25) \xrightarrow{Buscamos\ en\ la\ Tabla} 1 - (1 - 0.5987)\right] \rightarrow \boldsymbol{P(X < 4.5)}$$
$$\boldsymbol{= 0.5987}$$

Queremos hallar el valor k, tal que $P(Z < k) = 0.33$. Como en la tabla que tenemos no nos aparece la probabilidad de 0.33, buscamos la contraria 0.67:

$$P(X < k) = 0.33 \xrightarrow{Tipificamos} P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{k-5}{2}\right) = 0.33 \xrightarrow{Buscamos\ en\ la\ Tabla} \frac{k-5}{2} = -0.44 \rightarrow \boldsymbol{k = 4.12}$$

Es decir, el 33% de las llamadas telefónicas no superan los **4.12 minutos**.