

Propuesta A

1. a) Despeja la matriz X en la siguiente ecuación matricial: $3 \cdot X + X \cdot A + B = I^4$, suponiendo que todas las matrices son cuadradas del mismo orden (I es la matriz identidad). (0.75 pts)

b) Dada la ecuación matricial: $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, despeja y calcula la matriz X . (0.75 pts)

2. En un coro, la suma de sopranos, mezzosopranos y contraltos es igual a 15. Un día que tuvieron que cantar faltaron 2 mezzosopranos y 1 contralto debido a la gripe, de tal forma que ese día el número de sopranos era igual a la media aritmética de mezzosopranos y contraltos. Y además ese día el número de mezzosopranos y el número de contraltos coincidían.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar el número total de sopranos, mezzosopranos y contraltos que tiene el coro asiduamente. (1.5 pts)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 pts)

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & \text{si } x < -1 \\ t & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 4x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en $x = 1$. (0.5 pts)

b) Para $t = 0$, representa gráficamente la función f . (1 pto)

4. La evolución del precio de un determinado producto, en miles de euros, durante 6 meses, viene dada por la función $f(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 50$, $0 \leq t \leq 6$, siendo t el tiempo medido en meses.

a) ¿Cuál fue el valor que alcanzó dicho producto el segundo mes ($t=2$)? (0.25 pts)

b) ¿Cuándo alcanzó su precio máximo ese producto? ¿Y a cuánto ascendió? (0.75 pts)

c) ¿Cuándo alcanzó su precio mínimo? ¿Y cuál es dicho valor? (0.5 pts)

5. De un estudio sobre accidentes de tráfico se dedujeron los siguientes datos: en el 15 % de los casos no se llevaba puesto el cinturón de seguridad, en el 60 % no se respetaron los límites de velocidad permitidos y en el 5 % de los casos no se cumplían ambas normas, es decir, no llevaban puesto el cinturón y no respetaban los límites de velocidad.

a) Calcula la probabilidad de que, en un accidente de tráfico, no se haya cumplido alguna de las dos normas. (0.75 pts)

b) Razona si son independientes los sucesos “tener accidente no llevando puesto el cinturón” y “tener accidente no respetando los límites de velocidad”. (0.75 pts)

6. Se sabe que el número de pulsaciones después de realizar una serie de ejercicios sigue una distribución normal de desviación típica $\sigma=5$. Los siguientes datos representan las pulsaciones de 20 personas elegidas al azar después de realizar dichos ejercicios: 123, 125, 122, 134, 128, 129, 124, 130, 125, 126, 122, 127, 116, 128, 121, 125, 129, 123, 126 y 128.

a) Determina el intervalo de confianza para la media poblacional del número de pulsaciones después de la realización de los ejercicios con un nivel de confianza del 97 %. (1 pto)

b) ¿Sería razonable pensar que este ejemplo proviene de una población normal con media $\mu=113.4$ con un nivel de confianza del 97 %? ¿Y con un nivel de significación igual a 0.08? Razona tus respuestas. (1 pto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

A1.- Solución:

$$3.X + X.A + B = I^4 \Rightarrow 3.X + X.A = I^4 - B \Rightarrow 3.I.X + X.A = I^4 - B \Rightarrow X(3.I + A) = I^4 - B \Rightarrow X = (I^4 - B).(3.I + A)^{-1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \right. \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

A2.- Solución:

Llamaremos s, m, c respectivamente al número de cada tipo de cantantes

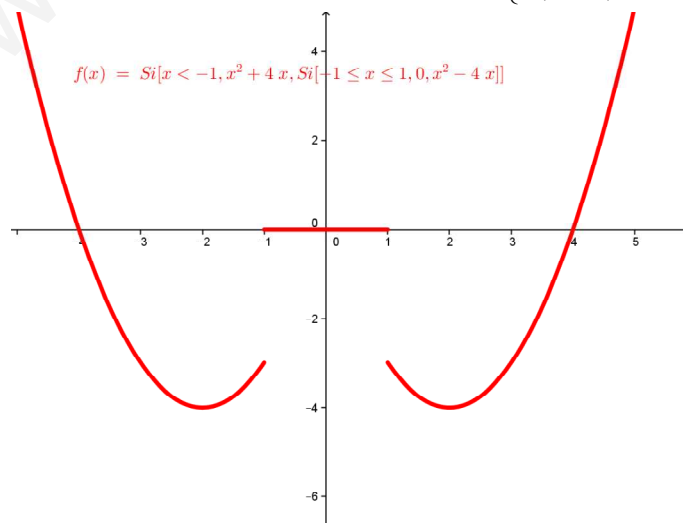
$$\text{Planteamiento} \begin{cases} s + m + c = 15 \\ s = \frac{m - 2 + c - 1}{2} \\ m - 2 = c - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s + m + c = 15 \Rightarrow s = 15 - (m + c) \\ 2s = m + c - 3 \Rightarrow 2s = -3 + (m + c) \Rightarrow 3s = 12 \Rightarrow s = 4 \\ m - c = 1 \end{cases}$$

$$\text{Con la primera y tercera y el valor obtenido de s tenemos: } \begin{cases} m + c = 11 \\ m - c = 1 \end{cases} \Rightarrow 2m = 12 \Rightarrow \begin{cases} m = 6 \\ c = 5 \end{cases}$$

A3.- Solución:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & \text{si } x < -1 \\ t & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 4x & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1) = t \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} t = t \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - 4x = -3 \end{cases} \Rightarrow t = -3 \text{ para continua en } x = 1$$

$$\text{Para } t = 0 \text{ son dos trozos de parábola y un segmento } f(x) = \begin{cases} x(x + 4) & \text{si } x < -1 \Rightarrow \text{Vertice}(-2, -4) \\ 0 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x(x - 4) & \text{si } x > 1 \Rightarrow \text{Vertice}(2, -4) \end{cases}$$



A4.- Solución:

$$a) f(2) = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 15 \cdot 2 + 50 = 8 - 36 + 30 + 50 = 52 \Rightarrow 52.000\text{€}$$

$$b) f'(t) = 3t^2 - 18t + 15 \Rightarrow \begin{cases} f'(t) = 0 \Rightarrow t^2 - 6t + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''(5) = 4 > 0 \\ f''(1) = -4 < 0 \end{cases} \\ f''(t) = 2t - 6 \end{cases}$$

Luego $(5, f(5)) = (5, 25000\text{€})$ Mínimo y $(1, f(1)) = (1, 57000\text{€})$ Máximo

El primer mes máximo 57.000€ y el quinto mínimo 25.000€

A5.- Solución:

Llamemos C al suceso "Tener accidente no llevando cinturón" y L al suceso "Tener accidente pasando límite de velocidad"

$$\begin{cases} a) P(C \cup L) = P(C) + P(L) - P(C \cap L) = 0,15 + 0,60 - 0,05 = 0,70 = 70\% \\ b) P(C/L) = \frac{P(C \cap L)}{P(L)} = \frac{0,05}{0,60} = 0,08333... \neq P(C) = 0,15 \Rightarrow \text{No son independientes} \end{cases}$$

A6.- Solución:

Para obtener el intervalo de confianza debemos tener en cuenta que:

$$P\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha, \text{ donde } 1 - \alpha \text{ es el nivel de confianza (0,97 en}$$

nuestro caso). $\bar{x}$ la media de la muestra, en nuestro caso 125,6 (sumamos los 20 y dividimos por 20); σ la desviación típica, ahora 5; n el tamaño de la muestra, 20.

$$1 - \alpha = 0,97 \Rightarrow \alpha = 0,03 \Rightarrow \alpha/2 = 0,015 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,17 \text{ ya que } (1 - 0,015 = 0,985) \text{ Ver tabla}$$

a) Luego el intervalo pedido es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(125,6 - 2,17 \cdot \frac{5}{\sqrt{20}}, 125,6 + 2,17 \cdot \frac{5}{\sqrt{20}}\right) = (123,2, 128)$$

b) En este caso NO se puede admitir que la media poblacional sea 113,2 con un nivel de confianza del 97%, porque 113,2 no pertenece al intervalo obtenido.

Si el nivel de significación es 0,08 entonces el nivel de confianza es $1 - 0,08 = 0,92$ o sea 92%

$$1 - \alpha = 0,92 \Rightarrow \alpha = 0,08 \Rightarrow \alpha/2 = 0,04 \Rightarrow z_{\alpha/2} < 2 \text{ ya que } (1 - 0,04 = 0,960) \text{ Ver tabla}$$

En este caso el intervalo de confianza sería de anchura menor y por tanto TAMPOCO se puede admitir que la media poblacional sea 113,2.

Propuesta B

1. Una empresa tiene 1100 latas de perdiz en escabeche y 1000 latas de lomo de orza. Desea elaborar dos tipos de lotes para regalo con dichas latas: lotes de tipo A formados por una lata de perdiz en escabeche y dos de lomo de orza, que venderá a 70 euros; lotes de tipo B formados por dos latas de perdiz en escabeche y una de lomo de orza que venderá a 60 euros.

- Expresa la función objetivo. (0.25 pts)
- Describe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (0.75 pts)
- Halla el número de lotes de cada tipo que debe preparar para obtener la mayor cantidad de dinero. (0.5 pts)

2. En una pequeña empresa de procesamiento de alimentos para su conservación, se tratan tres tipos de productos alimenticios: A, B y C. Estos alimentos pasan por tres procesos para su conservación: lavado, escaldado y congelación. En la tabla siguiente se muestra el tiempo que necesita un lote de cada tipo para su procesamiento:

	A	B	C
Lavado	5 minutos	3 minutos	2 minutos
Escaldado	10 segundos	20 segundos	30 segundos
Congelación	2 horas	3 horas	1 hora

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos lotes de cada producto alimenticio se pueden procesar con una disponibilidad de 825 minutos para lavado, 4000 segundos para el escaldado y 475 horas para congelado. (1.5 pts)

- Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 pts)

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 9 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 9 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- Estudia su continuidad en $x = -1$. (0.5 pts)
- Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(1, 4)$. (0.5 pts)
- Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(1, +\infty)$. (0.5 pts)

4. Determina una función polinómica de segundo grado sabiendo que tiene un mínimo relativo en el punto $(3, 2)$ y que la recta tangente a dicha función en el punto de abscisa $x=4$ es paralela a la recta $y=2x+7$. (1.5 pts)

5. Una persona que corre habitualmente tiene una probabilidad 0.01 de lesionarse. Suponiendo que el hecho de que una persona se lesione es independiente de que otra se lesione o no.

- ¿Cuál es la probabilidad de que se lesionen dos personas que corren habitualmente? (0.25 pts)
- ¿Cuál es la probabilidad de que se lesionen al menos una de cuatro personas que corren habitualmente? (0.5 pts)
- ¿Cuál es la probabilidad de que se lesione exactamente una persona de dos que corren habitualmente? (0.75 pts)

6. Un fabricante de lámparas LEDs sabe que la vida útil de una lámpara LED sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 1000 horas. Tomando una muestra aleatoria de lámparas producidas por dicho fabricante, se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza para la media poblacional (49804, 50196) con un nivel de confianza del 95 %.

- Calcula el tamaño de la muestra utilizada y calcula el valor que se obtuvo para la media muestral. (1.25 pts)

b) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 50 y un nivel de confianza del 92.98 %? (0.75 pts)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

B1.- Solución:

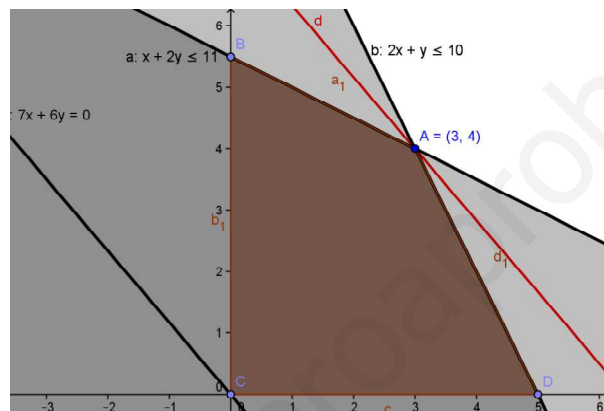
Llamaremos: x al número de lotes de tipo A, y al nº de lotes de tipo B

a) $B(x, y) = 70x + 60y$

b) Restricciones $\begin{cases} x + 2y \leq 1100 \\ 2x + y \leq 1000 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 1100 \\ 2x + y = 1000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 1100 \\ -4x - 2y = -2000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x = -900 \\ x = 300 \\ y = 400 \end{cases}$

$70x + 60y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0, y = 0 \\ x = -60, y = 70 \end{cases}$

c) 300 lotes tipo A y 400 tipo B para obtener $70 \cdot 300 + 60 \cdot 400 = 45000$ €

**B2.- Solución:**

Llamaremos A al nº de lotes de tipo A, B al nº de lotes de tipo B y C al nº de tipo C

$$\begin{cases} 5A + 3B + 2C = 825 \\ 10A + 20B + 30C = 4000 \\ 2A + 3B + C = 475 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5A + 3B + 2C = 825 \\ A + 2B + 3C = 400 \\ 2A + 3B + C = 475 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 3 & 20 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -22$$

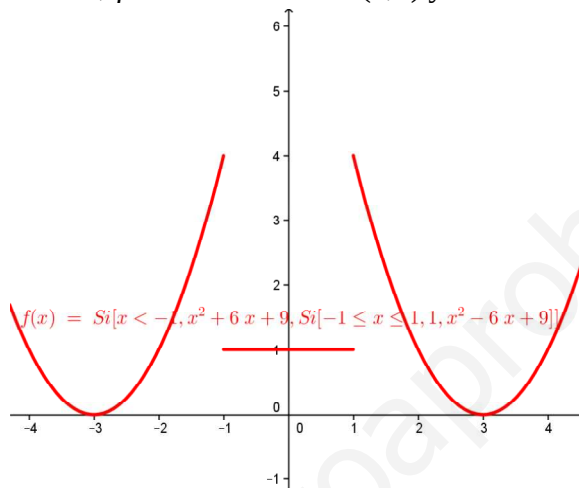
$$\left\{ \begin{aligned} A &= \frac{\begin{vmatrix} 825 & 3 & 2 \\ 400 & 2 & 3 \\ 475 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-22} = \frac{-2200}{-22} = 100, B = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 825 & 2 \\ 1 & 400 & 3 \\ 2 & 475 & 1 \end{vmatrix}}{-22} = \frac{-1650}{-22} = 75, C = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 825 \\ 1 & 2 & 400 \\ 2 & 3 & 475 \end{vmatrix}}{-22} = \frac{-1100}{-22} = 50 \end{aligned} \right.$$

B3.- Solución:

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 9 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 9 & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(-1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 + 6x + 9 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow f \text{ no es continua en } x = -1$$

$$b) f'(x) \text{ en } (1,4) = 2x - 6 \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \Rightarrow x = 3 \\ f''(x) = 2 \Rightarrow f''(3) = 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Mínimo en } (3, f(3)) = (3, 0)$$

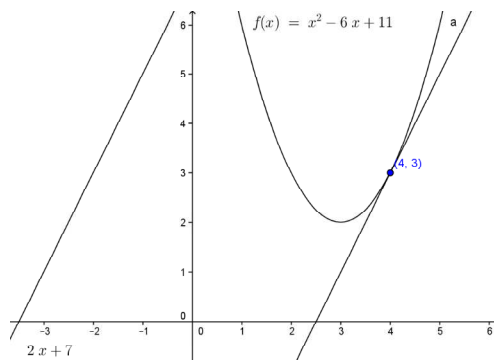
c) Como sólo hay un mínimo, f es decreciente en $(1,3)$ y creciente en $(3,+\infty)$



B4.- Solución:

$$\begin{cases} f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 2ax + b \\ f''(x) = 2a \end{cases} \\ \text{Mínimo en } (3,2) \Rightarrow \begin{cases} f(3) = 2 \Rightarrow 9a + 3b + c = 2 \\ f'(3) = 0 \Rightarrow 6a + b = 0 \end{cases} \\ \text{Tang. en } x = 4 \text{ paralela a } y = 2x + 7 \Rightarrow f'(4) = 2 \Rightarrow 8a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6a + b = 0 \\ 8a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = 2 \\ a = 1 \\ b = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9a + 3b + c = 2 \\ a = 1 \\ b = -6 \end{cases} \Rightarrow c = 2 - 9 + 18 \Rightarrow c = 11 \Rightarrow f(x) = x^2 - 6x + 11$$



B5.- Solución:

Llamemos L1 al suceso "Que se lesione la persona1" y L2 al suceso "que se lesione la persona2"

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \text{ Por se independientes } P(L1 \cap L2) = P(L1).P(L2) = 0,01 * 0,01 = 0,0001 \\ b) P(L1 \cup L2 \cup L3 \cup L4) = 1 - P(L1 \cap L2 \cap L3 \cap L4) = 1 - 0,01^4 = 0,99999999 \\ c) P((L1 \cap L'2) \cup (L'1 \cap L2)) = 2P(L1 \cap L'2) = 2P(L1).P(L'2) = 2 * 0,01 * 0,99 = 0,0198 \\ \text{Donde L'1 es el contrario de L1, L'2 el contrario de L'2 y por ser independientes todos los sucesos} \end{array} \right.$$

B6.- Solución:

Para obtener el intervalo de confianza (que ahora sabemos) debemos tener en cuenta que:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \text{ es la fórmula del intervalo de confianza. } \bar{x} \text{ la media de la}$$

muestra, observamos que es el centro del intervalo. O sea la semisuma de los extremos

$$\bar{x} = \frac{49804 + 50196}{2} = 50000; \sigma \text{ la desviación típica, ahora 1000; } n \text{ el tamaño de la}$$

muestra,(que nos piden). Llamaremos r al radio del intervalo de confianza. El radio del intervalo es la **semidiferencia** de los extremos, Y con ayuda de la tabla y sabiendo que el nivel de confianza es el 95%

$$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \alpha / 2 = 0,025 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96 \text{ ya que } (1 - 0,025 = 0,975) . \text{ Ver tabla}$$

Luego:

$$\left\{ \begin{array}{l} r = \frac{49804 - 50196}{2} = 196 \\ r = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \frac{1000}{\sqrt{n}} \end{array} \right. \Rightarrow 196 = 1,96 \frac{1000}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1960}{196} = 10 \Rightarrow n = 100$$

El error máximo admitido es el radio del intervalo de confianza por tanto:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - \alpha = 0,9298 \Rightarrow \alpha = 0,0702 \Rightarrow \alpha / 2 = 0,0351 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,801 \text{ ya que } (1 - 0,0351) = 0,9649 \\ E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,801 \frac{1000}{\sqrt{50}} = 254,7 \end{array} \right. \Rightarrow$$