Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado (2016)
Materia:
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A ó B.
Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Propuesta A

1. *En una granja hay vacas y caballos. El veterinario contratado tiene la obligación de supervisar diariamente entre 4 y 8 vacas, y además entre 2 y 5 caballos. Además, el número de vacas supervisadas debe ser al menos el doble que el número de caballos supervisados. El veterinario tarda una hora en supervisar cada animal y trata de averiguar cuál es el tiempo mínimo diario que le permite cumplir todas las condiciones del contrato.*

a) Expresa la función objetivo. (0.25 ptos)

b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (0.5 ptos)

c) Halla el número de vacas y caballos que debe supervisar diariamente para cumplir las condiciones en un tiempo mínimo. (0.75 ptos)

2. *He comprado 5 kg de almendras, 3 kg de avellanas y 2 kg de cacahuetes, y he pagado por todo ello 98 euros. La diferencia entre el precio por kg de las avellanas y de los cacahuetes, es igual al precio por kg de las almendras. Si hubiera comprado 1 kg de cada fruto seco, hubieras pagado 32 euros.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar el precio por kg de cada fruto seco. (1.5 ptos)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} -(x+3)^2 & si\ x < -3 \\ t, & si\ -3 \le x \le 3 \\ -(x-3)^2 & si\ x > 3 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en $x = 3$. (0.5 ptos)

b) Para $t = 2$, representa gráficamente la función f. (1 pto)

4. *De la función $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ sabemos que pasa por el punto (0,0), que tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa 3 y que la pendiente de la recta tangente en ese mismo punto vale -18. Con estos datos halla el valor de los parámetros a, b y c. (1.5 ptos)*

5. *De un total de 80 alumnos de un instituto que se han presentado a la PAEG, 6 no han aprobado la PAEG.*

a) Calcula la probabilidad de que un alumno de ese instituto elegido al azar haya aprobado la PAEG. (0.25 ptos)

b) Calcula la probabilidad de que si seleccionamos tres alumnos distintos al azar de este instituto, ninguno resulte suspenso. (0.5 ptos)

c) Si elegimos cuatro alumnos distintos al azar y el primero y el segundo han suspendido, ¿cuál es la probabilidad de que el tercero y el cuarto sean suspensos? (0.75 ptos)

6. *El gasto en electricidad por hogar y año sigue una distribución normal con media desconocida. Se elige una muestra aleatoria de 10 hogares y se observa que el gasto para los hogares de esta muestra (en euros) es: 828, 687, 652, 650, 572, 769, 860, 681, 589 y 755. Según la compañía eléctrica el gasto por hogar y año tiene una desviación típica $\sigma = 100$ euros.*

a) Determina el intervalo de confianza para la media poblacional del gasto en electricidad por hogar y año, con un nivel de confianza del 97%. (1 pto)

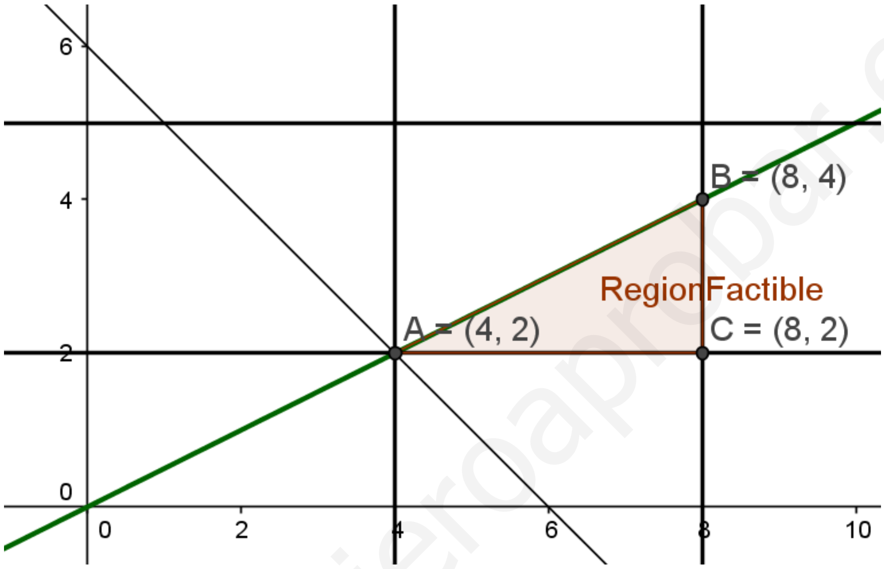
b) ¿Aceptarías con un nivel de confianza del 97% que la media poblacional es $\mu = 800$ euros? ¿Y con un nivel de significación igual a 0.09? Razona tus respuestas. (1 pto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

A1.- Solución:

Llamaremos ***x*** al nº de vacas e ***y*** al nº de caballos

$$\begin{cases} a)\text{Tiempo}(x,y) = x + y \\ b)\begin{cases} 4 \le x \le 8 \\ 2 \le y \le 5 \\ x > 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Tiempo(4,2) = 4+2 = 6 \\ Tiempo(8,2) = 8+2 = 10 \\ Tiempo(8,4) = 8+4 = 12 \end{cases} \\ TiempoMínimo = 6\ horas \end{cases}$$



A2.- Solución:

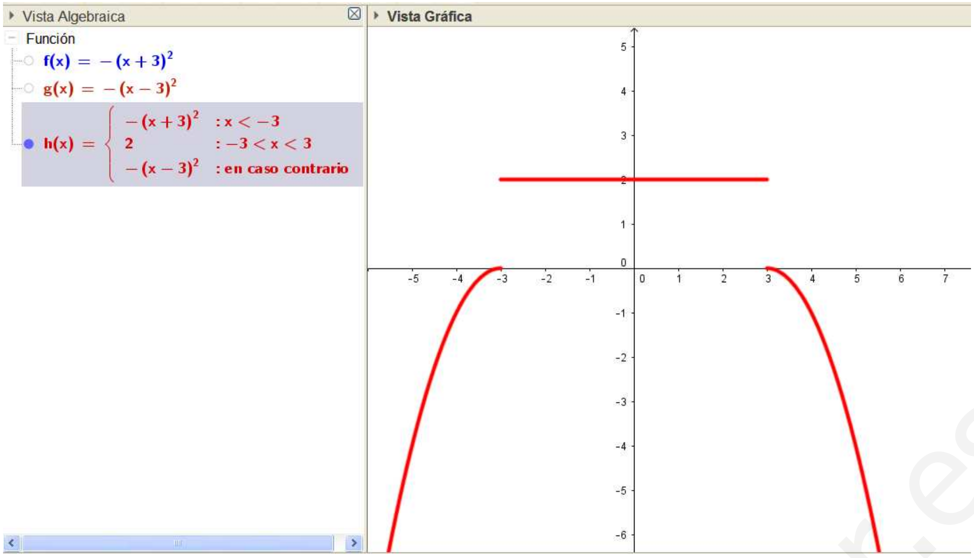
Llamaremos ***x*** al precio del kilo de almendras, ***y*** al precio del kilo de avellanas y ***z*** al precio del kilo de cacahuetes

$$\begin{cases} x + y + z = 32 \\ 5x + 3y + 2z = 98 \\ y - z = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Sust.3}^a\text{en1}^a \Rightarrow 2y = 32 \Rightarrow y = 16 \\ \text{Sust.3}^a\text{en2}^a \Rightarrow 8y - 3z = 98 \\ 8*16 - 3z = 98 \Rightarrow z = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 16 + 10 = 32 \\ x = 6 \\ y = 16 \\ z = 10 \end{cases}$$

A3.- Solución:

$$f(x) = \begin{cases} -(x+3)^2 & si\ x < -3 \\ t & si\ -3 \le x \le 3 \\ -(x-3)^2 & si\ x > 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(3) = t \\ \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} t = t \\ \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} -(x-3)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = 0 \text{ para continua en } x = 3$$

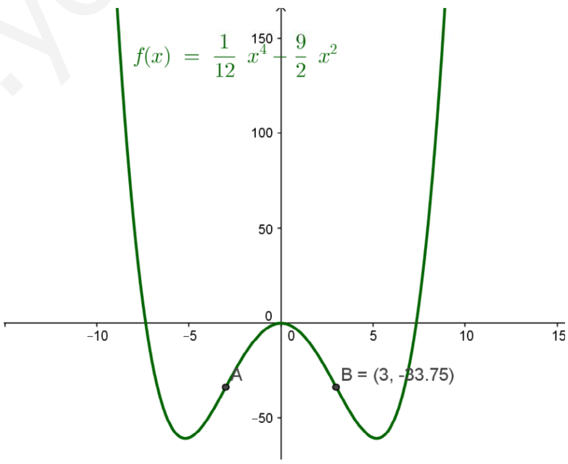
Para $t = 2$ son dos ramas de parábolas sencillas y un segmento $f(x) = \begin{cases} -(x+3)^2 & si\ x < -3 \\ 2 & si\ -3 \le x \le 3 \\ -(x-3)^2 & si\ x > 3 \end{cases}$



A4.- Solución:

$$f(x)=ax^4+bx^2+c\Rightarrow\begin{cases}\text{Pasa por }(0,0)\Rightarrow a*0+b*0+C=0\Rightarrow c=0\\ f'(x)=4ax^3+2bx\Rightarrow\ f''(x)=12ax^2+2b\\ P.I.\text{ en }(3,f(3))\Rightarrow 12a3^2+2b=0\Rightarrow 108a+2b=0\Rightarrow 108a=-2b\\ \text{Tangente en }(3,f(3))\text{ vale }-18\Rightarrow\ f'(3)=4*a*27+2b*3=-18\\ \text{Luego }108a+6b=-18\Rightarrow -2b+6b=-18\Rightarrow b=\dfrac{-9}{2}\\ \text{Y por tanto }108a=9\Rightarrow a=\dfrac{9}{108}=\dfrac{1}{12}\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{12}x^4-\frac{9}{2}x^2$$



A5.- Solución:

Ap=Aprobar

$$a)P(Ap) = \frac{74}{80}$$

$$b)P(Ap \cap Ap \cap Ap) = (P(Ap))^3 = \left(\frac{74}{80}\right)^3 = \left(\frac{37}{40}\right)^3$$

$$c)P\left({}^{3y4Sup}/_{1y2Sup}\right) = \frac{P(1y2y3y4Sup)}{P(1y2Susp)} = \frac{\left(\frac{6}{80}\right)^4}{\left(\frac{6}{80}\right)^2} = \left(\frac{6}{80}\right)^2 = \left(\frac{3}{40}\right)^2$$

A6.-Solución:

Para obtener el intervalo de confianza debemos tener en cuenta que:

$P\left[\bar{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$, donde 1-α es el nivel de confianza (0,97 en nuestro caso). $\bar{x}$ la media de la muestra, en nuestro caso 704,3 (sumamos los 10 valores y dividimos por 10); σ la desviación típica, ahora 100; n el tamaño de la muestra, 10.

$1-\alpha = 0{,}97 \Rightarrow \alpha = 0{,}03 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}015 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}17$ ya que $(1-0{,}015 = 0{,}985)$ Ver tabla

a) Luego el intervalo pedido es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\bar{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(704'3 - 2'17\frac{100}{\sqrt{10}}\ , 704'3 + 2'17\frac{100}{\sqrt{10}}\right) = (635'68\ , 772'92)$$

b) En este caso NO se puede admitir que la media poblacional sea 800 con un nivel de confianza del 97%, porque 800 no pertenece al intervalo obtenido.

Si el nivel de significación es 0,09 entonces el nivel de confianza es 1-0,09=0,91 o sea 91%

$1-\alpha = 0{,}91 \Rightarrow \alpha = 0{,}09 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}045 \Rightarrow z_{\alpha/2} < 2$ ya que $(1-0{,}045 = 0{,}955)$ Ver tabla

En este caso el intervalo de confianza sería de anchura menor y por tanto TAMPOCO se puede admitir que la media poblacional sea 800.

Propuesta B

1. *Dadas las matrices:* $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ k & -6 \end{pmatrix}$

Determina el valor que debe tomar el parámetro k para que ambas matrices conmuten; es decir: $A \cdot B = B \cdot A$. (1.5 ptos).

2. *Hemos gastado 7000 euros en comprar 85 acciones de la empresa A, 100 acciones de la empresa B y 70 acciones de la empresa C. El valor de una acción de la empresa C es el doble que el de una acción de la empresa A. El valor de una acción de la empresa B supera en 5 euros al de una acción de la empresa A.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuál es el valor de una acción de cada una de las empresas mencionadas. (1.5 ptos)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} (x-t)^2 & \text{si } x \leq 0 \\ (x+t)^3 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 0$? (0.5 ptos)

b) Para $t = 0$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, +\infty)$. (0.5 ptos)

c) Para $t = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(0, +\infty)$. (0.5 ptos)

4. *A las 0 horas de un día lanzamos a la atmósfera un pequeño globo de helio que mediante un transmisor nos va dando información, entre otras cosas, de la altura a la que se encuentra. El globo asciende durante algunas horas y después desciende hasta caer de nuevo a tierra. La altura a la que se encuentra el globo se ajusta a la función: $f(x) = 64x^2 - \frac{1}{2}x^4$ donde $f(x)$ está en metros y x en horas, con $x \geq 0$ y $f(x) \geq 0$.*

a) Determina cuándo vuelve el globo a caer a tierra, así como en qué intervalo de tiempo el globo está ascendiendo y en qué intervalo está descendiendo. (0.75 ptos)

b) Determina cuál es la altura máxima que alcanza el globo y cuándo se produce esa altura máxima. (0.75 ptos)

5. *En una liga de fútbol se sabe que el 5 % de los futbolistas son asiáticos, el 25 % son africanos y el resto son europeos. También se sabe que el 10 % de los futbolistas asiáticos, el 20 % de los futbolistas africanos y el 25 % de los futbolistas europeos hablan castellano.*

a) Calcule la probabilidad de que un futbolista, elegido al azar, hable castellano. (0.75 ptos)

b) Si nos encontramos con un futbolista que no habla castellano, ¿cuál es la probabilidad de que sea europeo? (0.75 ptos)

6. *El consumo medio de agua por habitante y día en España sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 30$ litros. Tomando una muestra aleatoria de habitantes, se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza para la media poblacional (130.4, 169.6) con un nivel de confianza del 95 %.*

a) Calcula el tamaño de la muestra utilizada y calcula el valor que se obtuvo para la media muestral. (1.25 ptos)

b) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 92.98 %? (0.75 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

B1.- Solución:

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-4 & -2\\ k & -6\end{pmatrix}, \quad A\cdot B=B\cdot A \Rightarrow \begin{cases}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4 & -2\\ k & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12-k & 0\\ -4+2k & -14\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}-4 & -2\\ k & -6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14 & 0\\ 3k-6 & -k-12\end{pmatrix}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-12-k=-14\\ -4+2k=3k-6\\ -14=-k-12\end{cases} \Rightarrow \{k=2$$

B2.- Solución:

Llamaremos ***x*** al precio en euros de la acción de la empresa A. ***y*** al precio de la acción de la empresa B y ***z*** al de la empresa C

$$\begin{cases}85x+100y+70z=7000\\ z=2x\\ y=x+5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}Sust.\ en 1ª la\ 2ª y\ la 3ª \Rightarrow\\ 85x+100(x+5)+140x=7000\\ 185x+140x=6500\\ 325x=6500\\ x=20\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}z=40\\ y=25\end{cases}$$

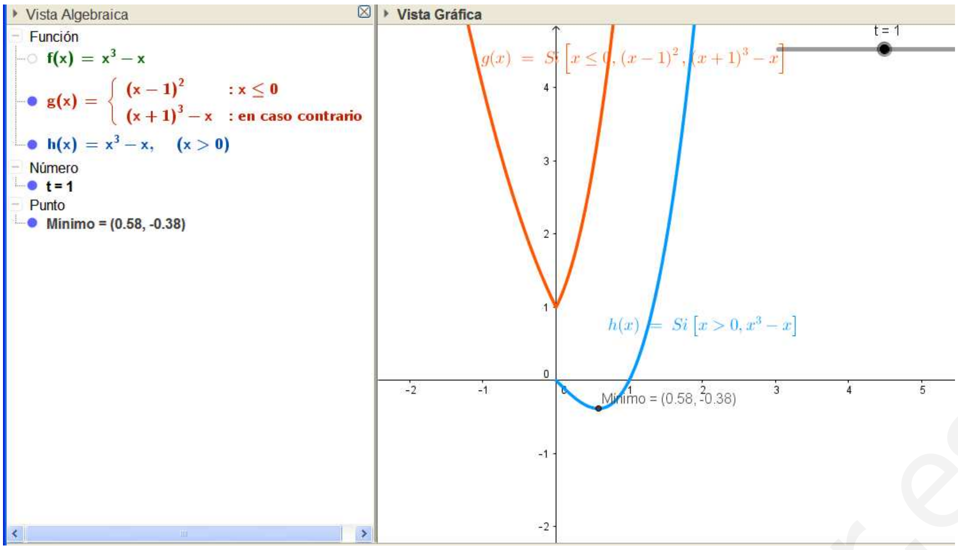
B3.- Solución:

$$a)\, f(x)=\begin{cases}(x-t)^2 \ si\ x\le 0\\ (x+t)^3-x\ si\ x>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}f(0)=t^2\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-t)^2=t^2\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+t)^3-x=t^3\end{cases} \Rightarrow t=1 \text{ para continua en x = 0}$$

$$b)\, f(x)=\begin{cases}x^2 \ si\ x\le 0\\ x^3-x\ si\ x>0\end{cases}) \Rightarrow \begin{cases}Si\ x>0,\ f'(x)=3x^2-1\\ f'(x)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3x^2-1=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ f''(x)=6x \Rightarrow f''(\dfrac{1}{\sqrt{3}})>0\end{cases}$$

Luego Mínimo en $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, f(\frac{1}{\sqrt{3}})\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{3\sqrt{3}}\right)$

$$c)\begin{cases}Si\ 0<x<\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 3x^2-1<0 \Rightarrow f \text{ es decreciente de } 0 \text{ a } \dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ Si\ x>\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 3x^2-1>0 \Rightarrow f \text{ es creciente de } \dfrac{1}{\sqrt{3}} \text{ hasta } \infty.\end{cases}$$



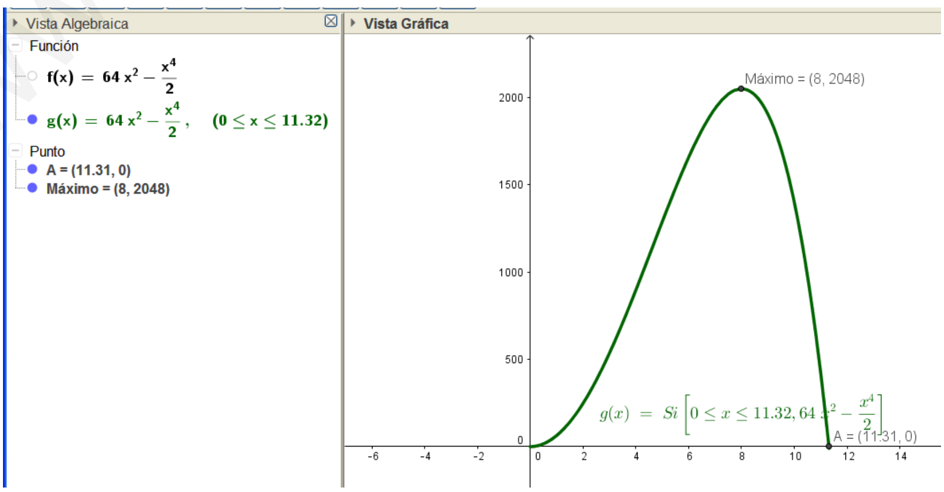
B4.- Solución:

$a)$ Volverá a caer cuando $f(x)=0$ con $x>0$

Por tanto, $\begin{cases} 64x^2-\dfrac{1}{2}x^4=0 \Rightarrow x^2(64-\dfrac{1}{2}x^2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{128} \Rightarrow x=\sqrt{128}\approx 11'31 \text{ horas} \end{cases} \\ x>0 \end{cases}$

Luego a las 11'31 horas vuelve a tierra. Entre las 0 y las 8 horas asciende y después desciende como veremos a continuación

$$b)\begin{cases} f'(x)=128x-2x^3 \\ f''(x)=128-6x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x)=0 \Rightarrow 2x(64-x^2)=0 \Rightarrow \begin{cases} Si\ 0<x<8,\ f'(x)>0,\ Asciende \\ Si\ x=8,\ f'(x)=0 \\ Si\ 8<x<\sqrt{128},\ f'(x)<0,\ Desciende \end{cases} \\ f''(x)=128-6x^2 \Rightarrow \begin{cases} f''(8)=256>0 \\ \text{Luego Máximo en } (8,f(8))=(8\ ,2048) \end{cases} \end{cases}$$



B5.- Solución:

Consideramos los sucesos: As= Ser asiático. Af= Ser africano. E= Ser europeo.

HC=Hablar castellano. NHC= No hablar castellano

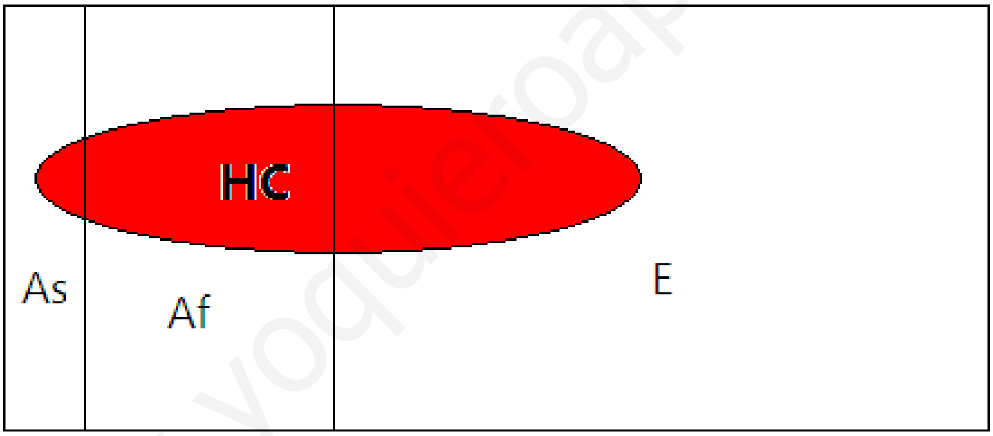
$a) P(HC)=P(As).P(HC/As)+P(Af).P(HC/Af)+P(E).P(HC/E)=$

$5\% * 10\% + 25\% * 20\% + 70\% * 25\% = 7'25\%$ Luego $P(HC) = 7'25\%$

$P(NHC) = 1 - P(HC) = 1 - 7'25\% = 92'75\%$

$P(NHC/E) = 1 - P(HC/E) = 1 - 25\% = 75\%$

$$b)\ P(E/NHC) = \frac{P(E).P(NHC/E)}{P(NHC)} = \frac{70\% * 75\%}{92'75\%} = 56'76\%$$



B6.- Solución:

Para obtener el intervalo de confianza debemos tener en cuenta que:

$P\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha$, donde 1-α es el nivel de confianza (0,95 en nuestro caso). $\bar{x}$ la media de la muestra, en este caso nos la piden; σ la desviación típica, ahora 30; n el tamaño de la muestra, también se nos pide.

$1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \Rightarrow \alpha / 2 = 0{,}025 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$ ya que $(1 - 0{,}025 = 0{,}975)$ Ver tabla

a) Sabemos que la fórmula que nos da el intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ , \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \text{En nuestro caso } (130'4 \ , 169'6) \Rightarrow \bar{x} = \frac{130'4 + 169'6}{2} = 150$$

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 150 - 1'96 \frac{30}{\sqrt{n}} = 130'4 \Rightarrow 1'96 \frac{30}{\sqrt{n}} = 150 - 130'4 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1'96 * 30}{19'6} = 3 \Rightarrow n = 9$$

$b)$ Sabemos que error $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Si ahora $n = 100, 1 - \alpha = 0'9298$

Entonces $\alpha = 0'0702 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0'0351 \Rightarrow 1 - 0'0351 = 0'9649 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1'81$

Luego $E = 1'81 \frac{30}{10} = 5'43$