Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado (2016)
Materia:
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A ó B.
Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Propuesta A

1. *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Realiza la siguiente operación: $(A - B) \cdot C^T$ *(donde* C^T *es la matriz transpuesta de C). (0.75 ptos)*

b) (0.75 ptos) Explica la razón por la cual las dos matrices siguientes no tienen inversa:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

2. *Cierto dulce tradicional está compuesto exclusivamente por tres ingredientes: harina de trigo, huevo y miel. El porcentaje de harina es el triple de la suma de los porcentajes de los otros dos ingredientes. Además, la diferencia entre el porcentaje de harina y el de huevo es seis veces el porcentaje de miel.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar el porcentaje de cada ingrediente en este dulce. (1.5 ptos)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} t^2 + t - 5x & \text{si } x \le 1 \\ (x-3)^2 + t & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ *es continua en* $x = 1$*? (0.5 ptos)*

b) Para $t = 0$*, calcula los extremos relativos de la función* $f(x)$ *en el intervalo* $(1, +\infty)$*. (0.5 ptos)*

c) Para $t = 0$*, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función* $f(x)$ *en* $(1, +\infty)$*. (0.5 ptos)*

4. *De la función* $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *sabemos que tiene un máximo relativo en el punto (1,2) y que tiene un punto de inflexión en el punto (0,0). Con estos datos, halla los valores de los parámetros a, b, c y d. (1.5 ptos)*

5. *En una empresa de Toledo se producen dos modelos de vajillas: A y B. El 10 % de las vajillas son del modelo A y el 90 % del modelo B. La probabilidad de que una vajilla del modelo A sea defectuosa es 0.02 y de que una vajilla del modelo B sea defectuosa es 0.01.*

a) Elegida una vajilla al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa? (0.75 ptos)

b) Se escoge al azar una vajilla y resulta defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea del modelo A? (0.75 ptos)

6. *La longitud de un determinado insecto sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica* σ*=0.52 centímetros. Se toma una muestra aleatoria de tamaño 40 y se calcula la media muestral, siendo esta igual a 2.47 centímetros.*

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 95 %. (1 pto)

b) ¿Es razonable que la media de la longitud del insecto sea μ*=2.2, con un nivel de confianza del 95 %? Obtén un valor razonable para la media de la longitud de este insecto* μ *con ese mismo nivel de confianza. Razona tus respuestas. (1 pto)*

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

A1.- Solución:

$$(A-B).C^T=\left[\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 4\\ -3 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}-2 & 0 & -1\\ -2 & 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -3\\ 4 & 0\\ -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 0 & -1\\ -2 & 3 & 0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0 & -9 & 3\\ -8 & 0 & -4\\ 6 & -3 & 2\end{pmatrix}$$

b) Tienen inversa las matrices cuadradas cuyo determinante es distinto de 0. Como M no es cuadrada NO tiene inversa. N Tampoco tiene inversa porque aunque es cuadrada su determinante es 0.

$$|N|=\left|\begin{pmatrix}-2 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}\right|=0$$

A2.- Solución:

T=Tanto por ciento de harina de trigo, H=Tanto por ciento de huevo, M=Tanto por ciento de miel

$$a)\begin{cases}T=3(H+M)\\ T-H=6M\\ T+H+M=100\end{cases}$$

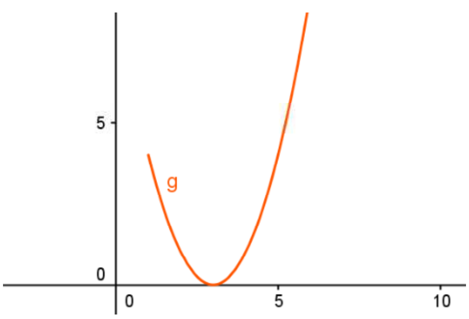
$$b)\begin{cases}3(H+M)=H+6M\\ 3(H+M)=100-(H+M)\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}2H-3M=0\\ 4H+4M=100\end{cases}\Longrightarrow 1ª(-2)mas\ 2ª\Longrightarrow\{M=10 \quad H=\frac{3M}{2}=15$$
$$T=100-H-M=100-15-10=75$$

A3.- Solución:

$$f(x)=\begin{cases}t^2+t-5x\ si\ x\le 1\\ (x-3)^2+t\ \ si\ x>1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(1)=t^2+t-5\\ \lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}t^2+t-5x=t^2+t-5\\ \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-3)^2+t=(-2)^2+t=4+t\\ t^2+t-5=4+t\Rightarrow t^2=9\Rightarrow t=\pm 3\text{ para continua en x}=1\end{cases}$$

$Para\ t=0\ \ y\ \ x\in(1,+\infty)$ se trata de una sencilla rama de parábola con vértice en (3,0)

b) Luego mínimo en (3,0). c) Decreciente en (1 , 3) y creciente en $(3,+\infty)$



A4.- Solución:

Los datos nos llevan a asegurar que la función pasa por (1,2) y por (0,0) y que la derivada primera se anula para x=1 y la derivada segunda se anula para x=0

$$\left\{\begin{array}{c} f(1) = 2 \Longrightarrow a+b+c+d = 2 \\ f(0) = 0 \Longrightarrow d = 2 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow 3a*1^2+2b*1+c = 0 \\ f''(0) = 0 \Longrightarrow 6a*0+2b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} a+b+c = 2 \\ 3a+2b+c = 0 \\ 2b = 0 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{c} d = 0 \\ b = 0 \\ a+c = 2 \\ 3a+c = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} d = 0 \\ b = 0 \\ a = -1 \\ c = 3 \end{array}\right.$$

$$\text{Luego } f(x) = -x^3+3x$$

A5.- Solución:

Llamaremos A al suceso “Elegida una vajilla al azar resulta que es de tipo A”, llamaremos B al suceso “Elegida una vajilla al azar resulta que es de tipo B” y D al suceso “Elegida una vajilla al azar resulta que es defectuosa”

Del enunciado obtenemos que: $P(A) = 0{,}1; P(B) = 0{,}9; P\left({}^{D}/_{A}\right) = 0{,}02; P\left({}^{D}/_{B}\right) = 0{,}01$

$$P(D) = P(A) * P\left({}^{D}/_{A}\right) + P(B) * P\left({}^{D}/_{B}\right) = 0{,}1 * 0{,}02 + 0{,}9 * 0{,}01 = 0{,}011 = 1{,}1\%$$

$$P\left({}^{A}/_{D}\right) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A) * P\left({}^{D}/_{A}\right)}{P(D)} = \frac{2}{11} = 18\%$$

A6.- Solución:

Para obtener el intervalo de confianza debemos tener en cuenta que:

$P\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$, donde 1-α es el nivel de confianza (0,95 en nuestro caso). $\bar{x}$ la media de la muestra, en nuestro caso 2,47 cm ; σ la desviación típica, ahora 0,52; n el tamaño de la muestra, 40.

$1-\alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}025 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$ ya que $(1-0{,}025 = 0{,}975)$ Ver tabla

a) Luego el intervalo pedido es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ , \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(2'47 - 1'96\frac{0'52}{\sqrt{40}}\ , 2'47 + 1'96\frac{0'52}{\sqrt{40}}\right) = (2'31\ , 2'63)$$

b)Luego el valor $\mu = 2'2$ no es razonable con un nivel de confianza del 95%

Sí lo sería cualquier valor del intervalo $(2'31\ , 2'63)$

Propuesta B

1. *Un aficionado a la artesanía dedica su tiempo libre a decorar botijos y jarrones. Cada mes decora un máximo de 10 botijos y un máximo de 10 jarrones. Dedica una hora a decorar un botijo y 2 horas a decorar un jarrón. Puede dedicar cada mes un máximo de 24 horas a esta afición. Vende toda su producción mensual, y cobra 6 euros por cada botijo y 18 euros por cada jarrón. Se propone obtener el máximo beneficio mensual posible con las condiciones mencionadas.*

a) Expresa la función objetivo. (0.25 ptos)

b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (0.5 ptos)

c) Halla el número de botijos y jarrones que debe decorar cada mes para obtener un beneficio máximo e indica a cuánto asciende ese beneficio máximo. (0.75 ptos)

2. *Los precios de mis tres frutos secos favoritos son: almendras a 6 euros/kg; avellanas a 16 euros/kg y cacahuetes a 10 euros/kg.*

En el supermercado he tomado algunos kilos de cada uno de estos frutos secos y he llenado una caja de 9 kilos, por la que he pagado 90 euros. En esta caja, la suma de los kilos de avellanas más los de cacahuetes es igual al doble de los kilos de almendras.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos kilos de cada fruto seco he comprado. (1.5 ptos)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} (x-t)^2 & si\ x < 0 \\ 1 & si\ x = 0 \\ (x-1)^2 & si\ x > 0 \end{cases}$

a) Halla el valor de t *para que* f *sea continua en* $x = 0$*. (0.5 ptos)*

b) Para $t = -1$*, representa gráficamente la función* f*. (1 pto)*

4. *Al comenzar el año ponemos en marcha el estudio de la evolución de la población de un tipo de insectos. Hemos llegado a la conclusión de que esa población se ajusta a la función:* $f(x) = -\frac{1}{30}x^4 + \frac{2}{5}x^3 + 7$ *donde* x *está en meses, con* $0 \leq x \leq 12$ *y* $f(x)$ *está en decenas de individuos.*

a) Calcula cuántos insectos tenemos al comenzar el estudio $(x = 0)$ *y cuántos al terminarlo* $(x = 12)$*. (0.5 ptos)*

b) Determina en qué intervalo la población crece y en cuál decrece. (0.5 ptos)

c) Determina en qué momento la población de insectos es máxima y a cuántos individuos asciende. (0.5 ptos)

5. *Se sabe que una máquina determinada tiene una probabilidad de tener una avería de 0.1. Tenemos una empresa con 4 máquinas como las anteriores que funcionan de forma independiente.*

a) ¿Cuál es la probabilidad de que las cuatro tengan una avería? (0.5 ptos)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna tenga una avería? (0.5 ptos)

c) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de las máquinas tenga una avería? (0.5 ptos)

6. *Se sabe que las puntuaciones de los alumnos en la PAEG siguen una distribución normal de desviación típica* σ*=1. Los siguientes datos representan las puntuaciones de 15 alumnos elegidos al azar: 7.8, 6.8, 6.7, 6.2, 7.4, 8.1, 5.9, 6.9, 7.5, 8.3, 7.5, 7.1, 6.1, 7.0 y 7.5.*

a) Determina el intervalo de confianza para la media poblacional de la puntuación en la PAEG con un nivel de confianza del 97%. (1 pto)

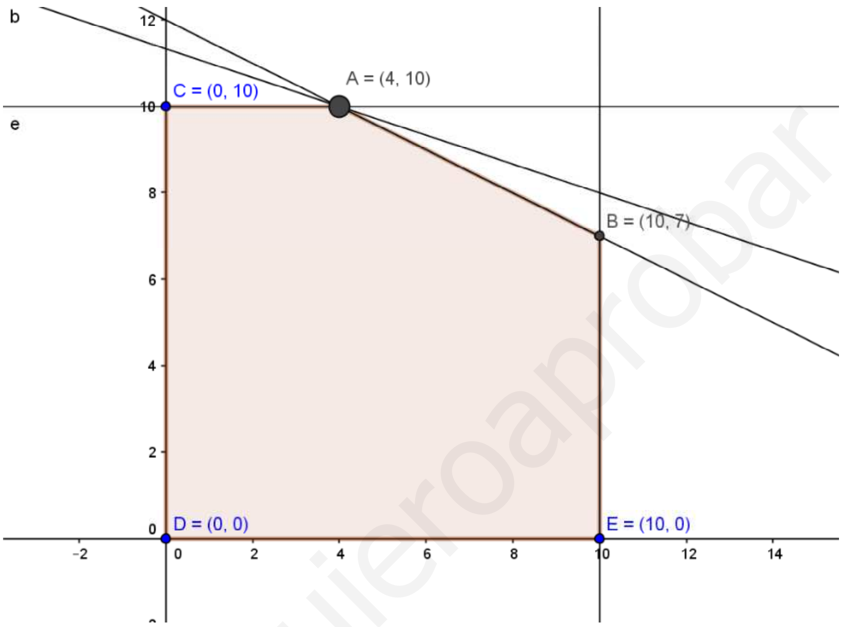
b) ¿Sería razonable pensar que esta muestra proviene de una población normal con media μ*= 6 con un nivel de confianza del 97%? ¿Y con un nivel de significación igual a 0.08? Razona tus respuestas. (1 pto)*

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

B1.- Solución:

Llamaremos b al nº de botijos y j al nº se jarrones

$$\left\{\begin{array}{c} 0 \le b \le 10 \\ 0 \le j \le 10 \\ b + 2j \le 24 \\ Beneficio(b,j) = 6b + 18j \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} Beneficio(4,10) = 6*4 + 18*10 = 204 \\ Beneficio(10,7) = 6*10 + 18*7 = 186 \\ Beneficio(0,10) = 180 \\ Beneficio(10,0) = 60 \end{array}\right.$$
$$BeneficioMáximo = 204€$$



B2.- Solución:

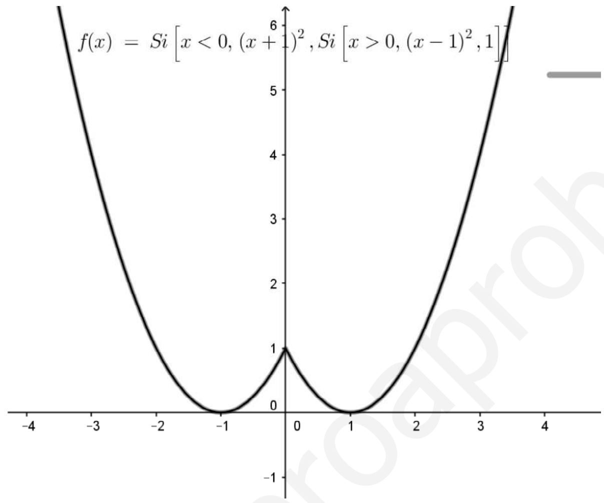
Llamaremos x al nº de kilos de almendras pedido, y al nº de kilos de avellanas y z al nº de kilos de cacahuetes

$$\left\{\begin{array}{c} x + `y + z = 9 \\ 6x + 16y + 10z = 90 \\ 2x = y + z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} 3^{a} + 1^{a} \Longrightarrow 3x = 9 \Longrightarrow x = 3 \\ y + z = 6 \\ 8y + 5z = 45 - 9 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} 8y + 5(6 - y) = 36 \\ 3y = 6 \\ y = 2 \\ z = 6 - 2 = 4 \end{array}\right.$$

B3.- Solución:

$$f(x)=\begin{cases}(x-t)^2 \ \ si \ x<0\\ 1 \quad si \quad x=0\\ (x-1)^2 \ \ si \ x>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0)=1\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} t^2 = t^2\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)^2 = 1\end{cases} \Rightarrow t=\pm 1 \text{ para continua en x = 0}$$

Para t = -1 son dos ramas de parábolas sencillas que se unen en (0,1) $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2 \ \ si \ x<0\\ 1 \quad si \quad x=0\\ (x-1)^2 \ \ si \ x>0\end{cases}$



B4.- Solución:

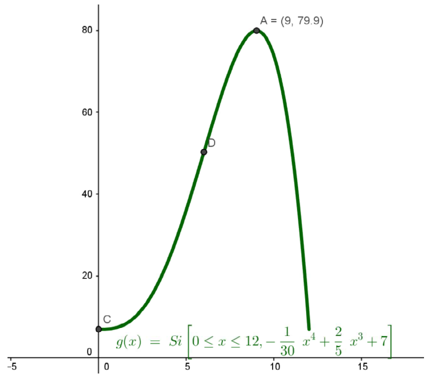
$$a)\ f(0)=-\frac{1}{30}*0+\frac{2}{5}*0+7=7\,decenas = 70 \text{ insectos}$$

$$\text{f(12)}=-\frac{1}{30}*12^4+\frac{2}{5}*12^3+7=7\,decenas = 70 \text{ insectos}$$

$$b)\ f'(x)=\Rightarrow\begin{cases} f'(x)=0\Rightarrow \dfrac{-4}{30}x^3+\dfrac{6}{5}x^2=0\Rightarrow x^2(\dfrac{-4}{30}x+\dfrac{6}{5})=0\begin{cases}x=0\\ x=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'(x)>0\ si\ x\in(0,9)\\ f'(x)<0\ si\ x\in(9,12)\end{cases}\\ f''(x)=\dfrac{-12}{30}x^2+\dfrac{12}{5}x\end{cases}$$

$\Rightarrow f(x)$ creciente en [0,9) y decreciente en (9,12]

$Luego (9, f(9))=(9{,}799) Máximo$. En el noveno mes 799 insectos se alcanza el máximo.



B5.- Solución:

Av_1=Tener avería en la máquina 1, …., Av_4=Tener avería en la máquina 4.

$A'v_1$=No tener avería en la máquina 1, …., Av_4=No tener avería en la máquina 4.

$$a) P(Av_1 \cap Av_2 \cap Av_3 \cap Av_4) = (P(Av_1))^4 = 0{,}1^4 = 0{,}0001$$

$$b) P(A'v_1 \cap A'v_2 \cap A'v_3 \cap A'v_4) = (P(A'v_1))^4 = (1 - P(Av_1))^4 = 0.9^4 = 0{,}6561$$

$$c) P(Av_1 \cup Av_2 \cup Av_3 \cup Av_4) = P((Av_1 \cap Av_2 \cap Av_3 \cap Av_4)') = 1 - 0{,}1^4 = 0{,}9999$$

B6.- Solución:

Para obtener el intervalo de confianza debemos tener en cuenta que:

$P\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha$, donde 1-α es el nivel de confianza (0,97 en nuestro caso). $\bar{x}$ la media de la muestra, en nuestro caso 7,12 (sumamos los 15 valores y dividimos por 15); σ la desviación típica, ahora 1; n el tamaño de la muestra, 15.

$1 - \alpha = 0{,}97 \Rightarrow \alpha = 0{,}03 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}015 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}17$ ya que $(1 - 0{,}015 = 0{,}985)$ Ver tabla

a) Luego el intervalo pedido es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(7'12 - 2'17 \frac{1}{\sqrt{15}}\ ,\ 7'12 + 2'17 \frac{1}{\sqrt{15}}\right) = (6'56\ ,\ 7'68)$$

b) En este caso NO se puede admitir que la media poblacional sea 6 con un nivel de confianza del 97%, porque 6 no pertenece al intervalo obtenido.

Si el nivel de significación es 0,08 entonces el nivel de confianza es 1-0,08=0,92 o sea 92%

$1 - \alpha = 0{,}92 \Rightarrow \alpha = 0{,}08 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}04 \Rightarrow z_{\alpha/2} < 2$ ya que $(1 - 0{,}04 = 0{,}960)$ Ver tabla

En este caso el intervalo de confianza sería de anchura menor y por tanto TAMPOCO se puede admitir que la media poblacional sea 6.