UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – SEPTIEMBRE 2017

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES AL ALUMNO

1. Debe escogerse una sola de las opciones.
2. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
3. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
4. **No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.**

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1

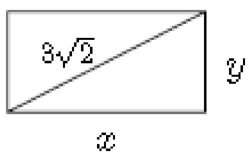
Sea M la matriz $\begin{pmatrix} x & -x & x \\ 1 & -x & x \\ x & 2x & x \end{pmatrix}$

1) [2,25 PUNTOS] Calcule el rango de M en función del valor de x.

2) [1 PUNTO] Calcule la inversa de M en el caso de $x = -1$.

Ejercicio 2

1) [2.5 PUNTOS] Calcule el rectángulo de base x cm, altura y cm y diagonal $3\sqrt{2}$ cm cuyo perímetro sea máximo.



2) [1 PUNTO] Calcule la recta tangente a la función $h(x) = x^2 + x$ en el punto (1, 2).

Ejercicio 3

Sean $P: x+3y+2z-1=0$ y $Q: 2x+6y+4z+3=0$ dos planos

1) [0,25 PUNTOS] Extraiga el vector normal al plano P de su ecuación implícita (general).

2) [1 PUNTO] Calcule ecuaciones paramétricas del plano P.

3) [1 PUNTO] Determine la posición relativa de los planos P y Q.

4) [1 PUNTO] Calcule la recta normal a Q que pase por el punto (0, 0, 0).

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1

Considere el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro *t*:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2tx + y + (t+1)z = 1 \\ (t-1)x + ty + tz = -2 \end{cases}.$$

1) [0,25 PUNTOS] Escriba el sistema de ecuaciones como un sistema matricial de la forma

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \cdot$$

2) [3 PUNTOS] Clasifique el sistema en función del valor del parámetro *t*, calculando todas las soluciones en los casos en los que sea compatible.

Ejercicio 2

Sea f la función definida a trozos dada por

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + x + 3 & si \quad x \leq 3 \\ 2x^2 - 3 & si \quad 3 < x < 5 \\ be^x & si \quad x \geq 5 \end{cases}$$

1) [1,5 PUNTOS] Calcule los valores de *a* y *b* para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$.

2) [1 PUNTO] Si $a = 1$, $b = 3$, calcule el área encerrada bajo la gráfica de f comprendido entre las rectas $x = -1$ y $x = 3$.

3) [1 PUNTO] Calcule los extremos relativos de la función $g(x) = 2x^2 + x + 3$.

Ejercicio 3

Sea Q el plano de ecuación $Q : (0,0,1) + s\overrightarrow{(2,-1,0)} + t\overrightarrow{(2,-1,1)}$.

1) [0,5 PUNTOS] Calcule la ecuación implícita (general) del plano Q.

2) [1,25 PUNTOS] Calcule la recta que pasa por (–1,2,4) que sea perpendicular al plano Q.

3) [1,5 PUNTOS] Calcule la distancia del punto (–1,2,4) al plano Q.

SOLUCIONES

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1

Sea M la matriz $\begin{pmatrix} x & -x & x \\ 1 & -x & x \\ x & 2x & x \end{pmatrix}$

1) [2,25 PUNTOS] Calcule el rango de *M* en función del valor de *x*.

2) [1 PUNTO] Calcule la inversa de *M* en el caso de *x* = –1.

1) Veamos cuando se anula el determinante de *M*.

$$|M| = \begin{vmatrix} x & -x & x \\ 1 & -x & x \\ x & 2x & x \end{vmatrix} = -x^3 - x^3 + 2x^2 + x^3 + x^2 - 2x^3 = -3x^3 + 3x^2$$

$$|M| = 0 \Rightarrow -3x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x^2(-x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -x+1 = 0 \to x = 1 \end{cases}$$

Estudiamos tres casos diferentes.

CASO 1. $x \neq 0$ y $x \neq 1$.

En este caso el determinante de *M* es no nulo y su **rango es 3**.

CASO 2. $x = 0$.

En este caso el determinante de *M* es nulo y su rango no es 3. Veamos si es 2 o 1.

$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Solo tiene un elemento no nulo, por lo que **el rango de *M* es 1**.

CASO 3. $x = 1$.

En este caso el determinante de *M* es nulo y su rango no es 3. Veamos si es 2 o 1.

$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la columna 1ª (igual que la 3ª) y la fila 1ª (igual que la 2ª) → $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante

$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3 \neq 0$. **El rango de *M* es 2**.

2) Para $x = -1$ la matriz M tiene inversa pues su determinante es no nulo.

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |M| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 1+1+2-1+1+2 = 6$$

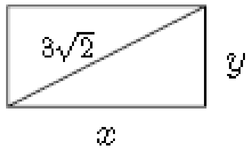
$$M^{-1} = \frac{Adj\left(M^T\right)}{|M|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}{6} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ -1/6 & -1/2 & -1/3 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2

1) [2.5 PUNTOS] Calcule el rectángulo de base x cm, altura y cm y diagonal $3\sqrt{2}$ cm cuyo perímetro sea máximo.



2) [1 PUNTO] Calcule la recta tangente a la función $h(x) = x^2 + x$ en el punto (1, 2).

1) Aplicando el teorema de Pitágoras la relación entre los lados del rectángulo es:

$$x^2 + y^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 18 \Rightarrow y^2 = 18 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{18 - x^2}$$

El perímetro es la suma de los lados del rectángulo:

$$P(x) = 2x + 2y = 2x + 2\sqrt{18 - x^2}$$

Busco el máximo de esta función usando la derivada.

$$P(x) = 2x + 2\sqrt{18 - x^2} \Rightarrow P'(x) = 2 + 2\frac{-2x}{2\sqrt{18 - x^2}} = 2 - \frac{2x}{\sqrt{18 - x^2}}$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow 2 - \frac{2x}{\sqrt{18 - x^2}} = 0 \Rightarrow \frac{2x}{\sqrt{18 - x^2}} = 2 \Rightarrow 2x = 2\sqrt{18 - x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{18 - x^2} \Rightarrow x^2 = \left(\sqrt{18 - x^2}\right)^2 \Rightarrow x^2 = 18 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{9} = 3\,cm$$

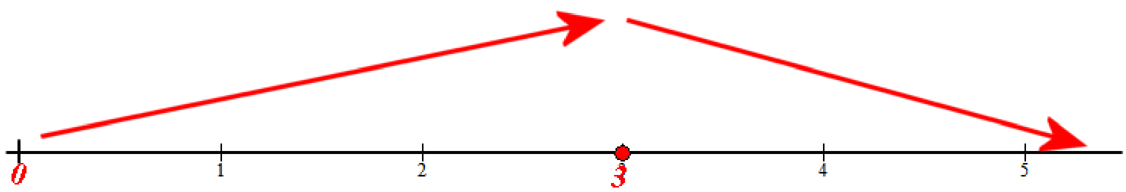
Veamos cómo es la función para valores menores y mayores de 3.

- Para valores de 0 a 3 cm tomamos $x = 1$ y la derivada vale

  $P'(1) = 2 - \dfrac{2}{\sqrt{18 - 1^2}} = 1{,}51 > 0$ y la función (el perímetro) crece de 0 a 3.

- Para valores mayores que 3 cm tomamos $x = 4$ y la derivada vale

  $P'(4) = 2 - \dfrac{8}{\sqrt{18 - 4^2}} = -3{,}65 < 0$ y la función (el perímetro) decrece a partir de 3 cm.



El perímetro es máximo para $x = 3\,cm$. En este rectángulo la altura vale $y = \sqrt{18 - 3^2} = 3$.

El perímetro es máximo para el cuadrado de lado 3 cm.

2) La recta tangente a la función $h(x) = x^2 + x$ en el punto (1, 2) tiene ecuación:

$$y - 2 = h'(1)(x-1)$$

Calculamos el valor de la derivada de la función para $x = 1$.

$$h(x) = x^2 + x \Rightarrow h'(x) = 2x + 1 \Rightarrow h'(1) = 2 + 1 = 3$$

Sustituimos y obtenemos la ecuación de la recta tangente:

$$\left.\begin{array}{l} y - 2 = h'(1)(x-1) \\ h'(1) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow y - 2 = 3(x-1) \Rightarrow y - 2 = 3x - 3 \Rightarrow \boxed{y = 3x - 1}$$

Ejercicio 3

Sean $P: x+3y+2z-1=0$ y $Q: 2x+6y+4z+3=0$ dos planos

1) [0,25 PUNTOS] Extraiga el vector normal al plano *P* de su ecuación implícita (general).

2) [1 PUNTO] Calcule ecuaciones paramétricas del plano *P*.

3) [1 PUNTO] Determine la posición relativa de los planos *P* y *Q*.

4) [1 PUNTO] Calcule la recta normal a *Q* que pase por el punto (0, 0, 0).

1) $P: x+3y+2z-1=0 \Rightarrow \vec{n}=(1,3,2)$

2)

PRIMERA FORMA. Despejamos "y" y "z" en la ecuación del plano.

$$P: x+3y+2z-1=0 \Rightarrow x=1-3y-2z \Rightarrow \begin{cases} x=1-3\lambda-2\alpha \\ y=\lambda \\ z=\alpha \end{cases}$$

SEGUNDA FORMA. Obtengamos tres puntos del plano que no estén alineados y con ellos obtendremos dos vectores directores del plano y las ecuaciones paramétricas de dicho plano.

$$\left.\begin{array}{l} P: x+3y+2z-1=0 \\ y=0;\ z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow A(1,0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} P: x+3y+2z-1=0 \\ y=1;\ z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x+3-1=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow B(-2,1,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} P: x+3y+2z-1=0 \\ y=0;\ z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x+2-1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow C(-1,0,1)$$

Obtenemos los vectores directores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{array}{l} A(1,0,0)\in P \\ \vec{u}=\overrightarrow{AB}=(-2,1,0)-(1,0,0)=(-3,1,0) \\ \vec{v}=\overrightarrow{AC}=(-1,0,1)-(1,0,0)=(-2,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow P: \begin{cases} x=1-3\lambda-2\alpha \\ y=\quad \lambda \\ z=\qquad \alpha \end{cases}$$

3) Estudiemos la posición relativa de sus vectores normales.

$$\left.\begin{array}{l} P: x+3y+2z-1=0 \Rightarrow \vec{n}=(1,3,2) \\ Q: 2x+6y+4z+3=0 \Rightarrow \vec{n'}=(2,6,4) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{3}{6}=\frac{2}{4}$$

Los vectores normales de ambos planos son proporcionales por lo que los planos son paralelos o coincidentes.

No son coincidentes pues el punto A(1,0,0) del plano P no pertenece al plano Q.

$$\left.\begin{array}{l} A(1,0,0) \\ P: x+3y+2z-1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1+0+0-1=0 \text{ ¡}Cierto! \Rightarrow A(1,0,0) \in P$$

$$\left.\begin{array}{l} A(1,0,0) \\ Q: 2x+6y+4z+3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2+0+0+3=0 \text{ ¡}Falso! \Rightarrow A(1,0,0) \notin Q$$

Los planos P y Q son paralelos.

4) La recta *r* normal a *Q* que pase por el punto (0, 0, 0) tiene como vector director el vector normal a Q.

$$\left.\begin{array}{l} (0,0,0) \in r \\ \vec{v} = \vec{n'} = (2,6,4) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r: \frac{x}{2} = \frac{y}{6} = \frac{z}{4}}$$

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1

Considere el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro *t*:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2tx + y + (t+1)z = 1 \\ (t-1)x + ty + tz = -2 \end{cases}.$$

1) [0,25 PUNTOS] Escriba el sistema de ecuaciones como un sistema matricial de la forma

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \cdot$$

2) [3 PUNTOS] Clasifique el sistema en función del valor del parámetro *t*, calculando todas las soluciones en los casos en los que sea compatible.

1) La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2t & 1 & t+1 \\ t-1 & t & t \end{pmatrix}$ y la matriz de los términos independientes es $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. La ecuación matricial es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2t & 1 & t+1 \\ t-1 & t & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2) Discutimos el sistema, empezando por investigar el posible valor del rango de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2t & 1 & t+1 \\ t-1 & t & t \end{vmatrix} = t + (t+1)(t-1) + \cancel{2t^2} - (t-1) - \cancel{2t^2} - t(t+1) =$$

$$= \cancel{t} + \cancel{t^2} - 1 \cancel{-t} + 1 - \cancel{t^2} - t = -t$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -t = 0 \Rightarrow t = 0$$

Estudiaremos dos situaciones diferentes.

Situación 1ª. $t \neq 0$

En este caso el determinante es no nulo y el rango de la matriz A es 3, por lo que el rango de la matriz ampliada A/B también es 3, al igual que el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado**.

Situación 2ª. $t = 0$

En este caso el determinante es nulo y el rango de A no es 3. Veamos cómo queda la matriz A y cuál es su rango.

$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\-1&0&0\end{pmatrix}$. Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 3ª y la columna 3ª (igual que la columna 2ª) → $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$. El rango de A es 2.

¿Cuál es el rango de la matriz ampliada A/B?

$A/B=\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&1&1&1\\-1&0&0&-2\end{pmatrix}$ tiene un menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 2ª (igual que la columna 3ª) → $\begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&1\\-1&0&-2\end{pmatrix}$ con determinante

$\begin{vmatrix}1&1&3\\0&1&1\\-1&0&-2\end{vmatrix}=-2-1+0+3+0+0=0$. El rango de A/B no es 3.

Como el rango de A es 2 el de A/B también es 2 y es menor que el número de incógnitas (3), por lo que el sistema es **compatible indeterminado**.

Resolvemos el sistema para $t\neq 0$ utilizando el método de Cramer.

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2t&1&t+1\\t-1&t&t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}3&1&1\\1&1&t+1\\-2&t&t\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&1\\2t&1&t+1\\t-1&t&t\end{vmatrix}}=\frac{3t-2(t+1)+t+2-t-3t(t+1)}{-t}=\frac{\cancel{3t}-2t\cancel{-2}\cancel{+t}\cancel{+2}\cancel{-t}-3t^2\cancel{-3t}}{-t}=$$

$$=\frac{-3t^2-2t}{-t}=3t+2$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1&3&1\\2t&1&t+1\\t-1&-2&t\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&1\\2t&1&t+1\\t-1&t&t\end{vmatrix}}=\frac{t+3(t+1)(t-1)-4t-(t-1)-6t^2+2(t+1)}{-t}=$$

$$=\frac{\cancel{t}+3t^2\cancel{-3}-4t\cancel{-t}\cancel{+1}-6t^2+2t\cancel{+2}}{-t}=\frac{-3t^2-2t}{-t}=3t+2$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 2t & 1 & 1\\ t-1 & t & -2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2t & 1 & t+1\\ t-1 & t & t\end{vmatrix}}=\frac{-2+t-1+6t^2-3t+3+4t-t}{-t}=\frac{6t^2+t}{-t}=-6t-1$$

La solución cuando $t\neq 0$ es: $x=3t+2;\ y=3t+2;\ z=-6t-1$

Resolvemos el sistema cuando $t = 0$.

$$\begin{cases}x+ & y+ & z= & 3\\ & y+ & z= & 1\\ -x & & = & -2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y+z=3\\ y+z=1\\ \boxed{x=2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2+y+z=3\\ y+z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y+z=1\\ y+z=1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y+z=1\Rightarrow\boxed{y=1-z}$$

Cuando $t = 0$ las soluciones son $x = 2$; $y = 1 - t$; $z = t$.

Ejercicio 2

Sea f la función definida a trozos dada por

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+x+3 & si \quad x\le 3 \\ 2x^2-3 & si \quad 3<x<5 \\ be^x & si \quad x\ge 5 \end{cases}$$

1) [1,5 PUNTOS] Calcule los valores de a y b para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$.
2) [1 PUNTO] Si a = 1, b = 3, calcule el área encerrada bajo la gráfica de f comprendido entre las rectas x = –1 y x = 3.
3) [1 PUNTO] Calcule los extremos relativos de la función $g(x)=2x^2+x+3$.

1) Para que la función sea continua debe serlo en $x = 3$ y en $x = 5$.
En ***x* = 3**

- Existe el límite de la función en $x = 3$.

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} ax^2+x+3=9a+6 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} 2x^2-3=15 \end{cases}\Big\}\{\text{Deben ser iguales}\}\Rightarrow 9a+6=15\Rightarrow 9a=9\Rightarrow a=1$$

$$\lim_{x\to 3} f(x)=15$$

- Existe la función en $x = 3$. $f(3)=ax^2+x+3=9a+6=15$
- El valor de la función y el límite son iguales.

Si tomamos $a = 1$ la función es continua en $x = 3$.

En ***x* = 5**

- Existe el límite de la función en $x = 5$.

$$\lim_{x\to 5} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 5^-} 2x^2-3=47 \\ \lim\limits_{x\to 5^+} be^x=be^5 \end{cases}\Big\}\{\text{Deben ser iguales}\}\Rightarrow 47=be^5\Rightarrow b=\frac{47}{e^5}$$

$$\lim_{x\to 5} f(x)=47$$

- Existe la función en $x = 5$. $f(5)=\frac{47}{e^5}e^5=47$
- El valor de la función y el límite son iguales.

Si tomamos $b=\frac{47}{e^5}$ la función es continua en $x = 5$.

Resumiendo: Los valores que hacen la función continua son $a = 1$ y $b=\frac{47}{e^5}$

2) Si a = 1, b = 3 la función queda $f(x)=\begin{cases} x^2+x+3 & si \quad x\le 3 \\ 2x^2-3 & si \quad 3<x<5 \\ 3e^x & si \quad x\ge 5 \end{cases}$.

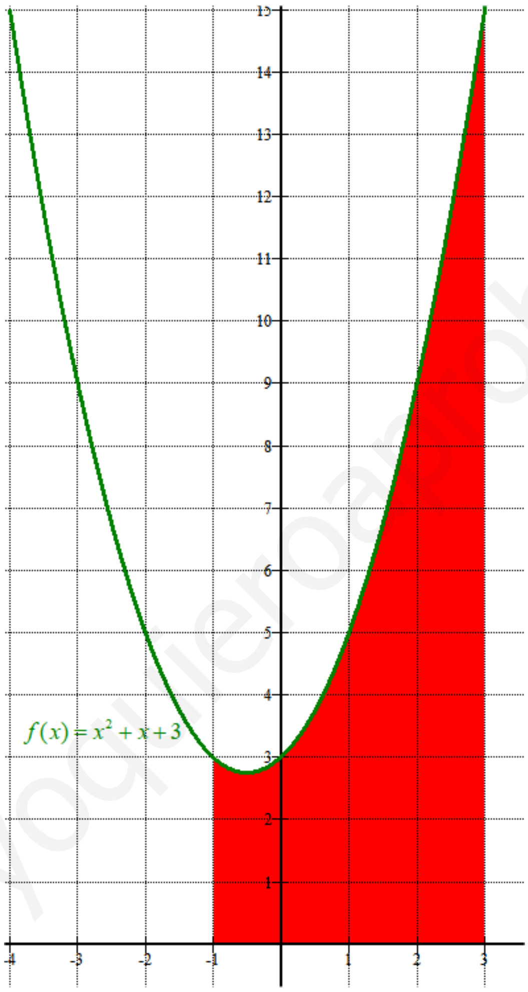
Como nos piden el área del recinto entre x = –1 y x = 3 la rama de la función que vamos a utilizar solo es la rama $f(x)=x^2+x+3$.
Veamos si la gráfica corta el eje de abscisas.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2+x+3 \\ y=0 \end{array}\right\}\Rightarrow x^2+x+3=0\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1-12}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-11}}{2}=No\ existe$$

Tomamos $x = 0$ para ver si la función es positiva o negativa → $f(0)=0^2+0+3=3>0$
No corta al eje de abscisas y la función es siempre positiva. El área será el valor de la integral definida de la función entre –1 y 3.

$$Área = \int_{-1}^{3} f(x)dx = \int_{-1}^{3} x^2+x+3dx = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+3x\right]_{-1}^{3} = \left[\frac{3^3}{3}+\frac{3^2}{2}+3\cdot 3\right]-\left[\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^2}{2}+3(-1)\right]=$$

$$=9+\frac{9}{2}+9+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+3=\boxed{25,33\,u^2}$$



El valor hallado para el área coincide con el valor aproximado que se puede obtener contando cuadraditos en el dibujo superior.

3) Hallamos los extremos relativos con la derivada primera.

$$g(x)=2x^2+x+3 \Rightarrow g'(x)=4x+1$$

$$g'(x)=0 \Rightarrow 4x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{4}$$

Comprobamos si es máximo o mínimo con la derivada segunda.

$$g'(x)=4x+1 \Rightarrow g''(x)=4 \Rightarrow g''\left(-\frac{1}{4}\right)=4>0$$

La función presenta un mínimo relativo en $x=-\frac{1}{4}$. La función es una parábola y este es su vértice. $g\left(-\frac{1}{4}\right)=2\left(-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{4}+3=\frac{2}{16}-\frac{1}{2}+3=\frac{21}{8}$. El mínimo es el punto $\left(-\frac{1}{4},\frac{21}{8}\right)$

Ejercicio 3

Sea Q el plano de ecuación $Q:(0,0,1)+s\overrightarrow{(2,-1,0)}+t\overrightarrow{(2,-1,1)}$.

1) [0,5 PUNTOS] Calcule la ecuación implícita (general) del plano Q.

2) [1,25 PUNTOS] Calcule la recta que pasa por (–1,2,4) que sea perpendicular al plano Q.

3) [1,5 PUNTOS] Calcule la distancia del punto (–1,2,4) al plano Q.

1)

$$Q:(0,0,1)+s\overrightarrow{(2,-1,0)}+t\overrightarrow{(2,-1,1)} \Rightarrow Q:\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$-x-2z+2+2z-2-2y=0 \Rightarrow -x-2y=0 \Rightarrow \boxed{Q:x+2y=0}$$

2) Si la recta es perpendicular al plano Q tendrá como vector director el normal del plano $Q:x+2y=0$.

$$\left.\begin{matrix} (-1,2,4)\in r \\ \vec{v}_r=\vec{n}=(1,2,0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{r:\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=4 \end{cases}}$$

3) Utilizamos la fórmula de la distancia de un punto (–1,2,4) a un plano $Q:x+2y=0$.

$$d\left((-1,2,4),Q\right)=\frac{|-1+4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}=\boxed{\frac{3\sqrt{5}}{5}u}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO.

Hallo el punto de corte de la recta hallada en el apartado 2) con el plano Q hallado en el apartado 1) y la distancia del punto al plano será el módulo del vector que une un punto con el otro.

$$\left.\begin{matrix} r:\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=4 \end{cases} \\ Q:x+2y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -1+\lambda+2(2+2\lambda)=0 \Rightarrow -1+\lambda+4+4\lambda=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\lambda+3=0 \Rightarrow \lambda=\frac{-3}{5} \Rightarrow \begin{cases} x=-1-\frac{3}{5}=-\frac{8}{5} \\ y=2-\frac{6}{5}=\frac{4}{5} \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow A\left(-\frac{8}{5},\frac{4}{5},4\right)$$

$$d\left((-1,2,4),Q\right)=d\left((-1,2,4),A\right)=\left|\left(-\frac{8}{5},\frac{4}{5},4\right)-(-1,2,4)\right|=$$

$$=\left|\left(-\frac{3}{5},\frac{-6}{5},0\right)\right|=\sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2+\left(-\frac{6}{5}\right)^2+0}=\sqrt{\frac{9}{25}+\frac{36}{25}}=\sqrt{\frac{45}{25}}=\boxed{\frac{3\sqrt{5}}{5}u}$$