



**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD
LOMCE – JUNIO 2017**

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES AL ALUMNO

1. Debe escogerse una sola de las opciones.
2. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
3. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
4. **No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.**

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1

Consideremos la igualdad matricial $A \cdot M = B$, donde $A = \begin{pmatrix} t & 2t & 2 \\ -1 & t & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

- 1) [0,25 PUNTOS] ¿Cuántas filas y columnas debe tener la matriz M ?
- 2) [1,5 PUNTOS] ¿Para qué valores de t es la matriz A invertible?
- 3) [1,5 PUNTOS] En el caso $t = -1$, despeje la matriz M en función de las matrices A y B y calcule su valor.

Ejercicio 2

Sea la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$.

- 1) [2,5 PUNTOS] Calcule la primitiva de f . Compruebe la solución obtenida.
- 2) [1 PUNTO] Calcule el área encerrada por f y el eje $y = 0$ y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

Ejercicio 3

Sea P el punto $(0, 2, 2)$. Sea r la recta expresada de forma continua:

$$r: \frac{x-2}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$$

- 1) [0,75 PUNTOS] Escriba las ecuaciones paramétricas de la recta r .
- 2) [1,5 PUNTOS] Calcule la distancia de P a r .
- 3) [1 PUNTO] Calcule un plano perpendicular a r que pase por el punto P .

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2**Ejercicio 1**

Considere el sistema matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 3a & 2a & 2a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- 1) [2 PUNTOS] Determine los valores de a para que el sistema sea compatible.
- 2) [1,25 PUNTOS] Calcule todas las soluciones en el caso en el que sea compatible indeterminado y en el caso $a=3$.

Ejercicio 2

Tenemos la función definida a trozos:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x} & \text{si } x < 0 \\ 2x^3 - 15x^2 + 36x + 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- 1) [2 PUNTOS] Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función g en $\mathbb{R} - \{0\}$ y determine los máximos y mínimos relativos.
- 2) [0,5 PUNTOS] Determine si la función es continua en $x = 0$.
- 3) [1 PUNTO] Haga un esbozo del gráfico de la función en un entorno de $x = 0$.

Ejercicio 3

Sean $A = (-2, 1, 0)$, $B = (1, 1, 1)$, $C = (2, 0, 2)$ tres puntos de $\mathbb{R}^3$.

- 1) [1 PUNTO] Calcule la ecuación implícita (general) del plano que pasa por A, B y C.
- 2) [1 PUNTO] Calcule la ecuación continua de la recta $\overline{BC}$.
- 3) [1 PUNTO] Calcule el área del triángulo definido por ABC.
- 4) [0,25 PUNTOS] Determine, usando el producto escalar, si los vectores $u = \overrightarrow{(3, 0, 1)}$ y $v = \overrightarrow{(4, -1, 2)}$ son ortogonales.

SOLUCIONES

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1

Consideremos la igualdad matricial $A \cdot M = B$, donde $A = \begin{pmatrix} t & 2t & 2 \\ -1 & t & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

- 1) [0,25 PUNTOS] ¿Cuántas filas y columnas debe tener la matriz M ?
- 2) [1,5 PUNTOS] ¿Para qué valores de t es la matriz A invertible?
- 3) [1,5 PUNTOS] En el caso $t = -1$, despeje la matriz M en función de las matrices A y B y calcule su valor.

- 1) Para que sea posible el producto de la matriz A por la matriz M debe ser el número de filas de M igual que el número de columnas de A (3). Y el número de columnas de M debe ser igual al de columnas de B (2).

Debe ser de dimensión 3×2 .

$$\left. \begin{array}{l} A \cdot M = B \\ 3 \times \boxed{3 \cdot m} \times n \rightarrow 3 \times 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = 2 \end{cases}$$

- 2) Para que A sea invertible debe tener determinante no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} t & 2t & 2 \\ -1 & t & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = t^2 - 2t - 2 + 2t + 2t - t = t^2 + t - 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 = t \\ \frac{-1-3}{2} = -2 = t \end{cases}$$

La matriz A tiene inversa cuando $t \neq -2$ y $t \neq 1$

- 3) Para $t = -1$ la matriz A tiene inversa y la calculamos.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 - 2 - 2 - 2 + 1 = -2 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Despejamos en la ecuación matricial, sustituimos los valores de las matrices y calculamos.

$$A \cdot M = B \Rightarrow M = A^{-1} \cdot B$$

$$M = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -2+0+0 & 6+4+0 \\ 0+0+2 & 0+1-2 \\ -2+0+2 & 6+3-2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 2 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 2/2 & -10/2 \\ -2/2 & 1/2 \\ 0 & -7/2 \end{pmatrix} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 1/2 \\ 0 & -7/2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2

Sea la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$.

- 1) [2.5 PUNTOS] Calcule la primitiva de f . Compruebe la solución obtenida.
 2) [1 PUNTO] Calcule el área encerrada por f y el eje $y = 0$ y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

1)

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ 1+x=t^2 \Rightarrow dx=2tdt \\ x=t^2-1 \end{array} \right\} = \int \frac{t^2-1}{t} 2tdt = \int \frac{t^2}{t} 2tdt - \int \frac{1}{t} 2tdt = \\ &= \int 2t^2 dt - \int 2dt = 2 \int t^2 dt - 2 \int dt = 2 \frac{t^3}{3} - 2t = \left\{ \begin{array}{l} \text{Deshacemos el cambio} \\ t^2=1+x \Rightarrow t=\sqrt{1+x} \end{array} \right\} = \\ &= \boxed{\frac{2}{3}(\sqrt{1+x})^3 - 2\sqrt{1+x} + K} \end{aligned}$$

Comprobación: Derivamos la primitiva y debemos obtener la función inicial.

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}(\sqrt{1+x})^3 - 2\sqrt{1+x} + K \right)' &= \frac{2}{3} \cdot 3(\sqrt{1+x})^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \\ &= \frac{(\sqrt{1+x})^2}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sqrt{1+x} - \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{(\sqrt{1+x})^2 - 1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1+x-1}{\sqrt{1+x}} = \frac{x}{\sqrt{1+x}} \end{aligned}$$

Queda demostrado que la primitiva es correcta.

- 2) Averiguamos los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje.

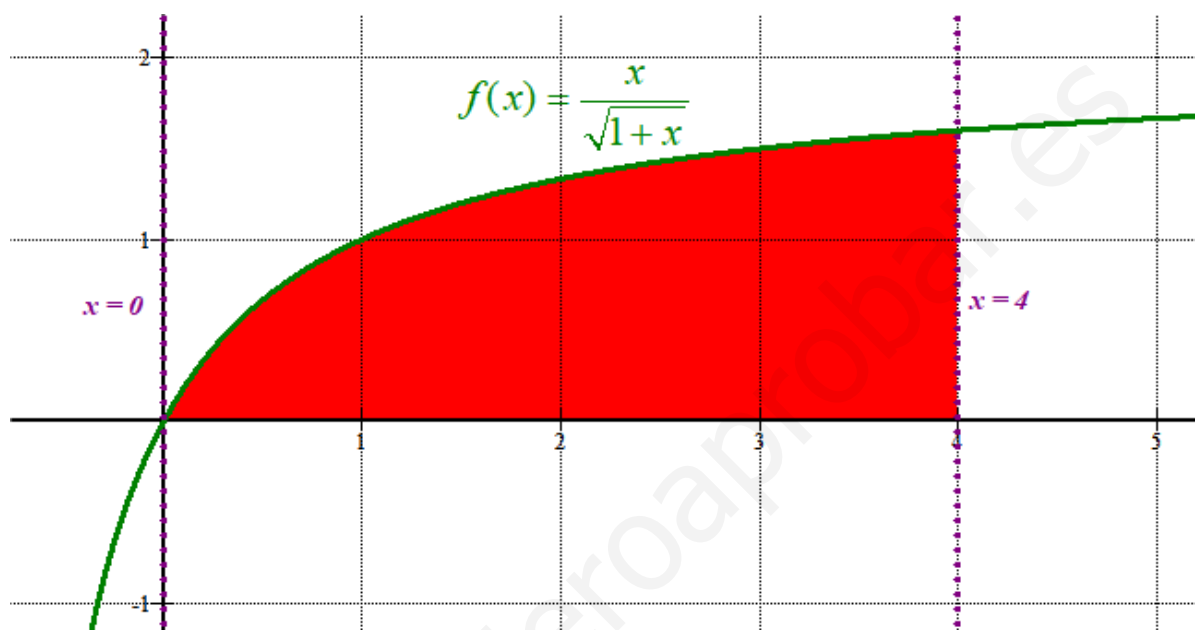
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}} \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = \frac{x}{\sqrt{1+x}} \Rightarrow x = 0$$

Comprobamos si la función es positiva o negativa entre $x = 0$ y $x = 4$.

$$\text{Le damos un valor intermedio } x = 2 \rightarrow f(2) = \frac{2}{\sqrt{1+2}} > 0$$

El área del recinto es el valor de la integral definida de la función entre 0 y 4.

$$\begin{aligned}
 \int_0^4 f(x) dx &= \int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx = \left[\frac{2}{3} (\sqrt{1+x})^3 - 2\sqrt{1+x} \right]_0^4 = \\
 &= \left[\frac{2}{3} (\sqrt{1+4})^3 - 2\sqrt{1+4} \right] - \left[\frac{2}{3} (\sqrt{1+0})^3 - 2\sqrt{1+0} \right] = \\
 &= \frac{2}{3} (\sqrt{5})^3 - \frac{6}{3} \sqrt{5} - \frac{2}{3} + 2 = \frac{2}{3} 5\sqrt{5} - \frac{6}{3} \sqrt{5} - \frac{2}{3} + 2 = \boxed{\frac{4}{3} \sqrt{5} + \frac{4}{3} = 4,314 u^2}
 \end{aligned}$$



En el dibujo de la gráfica y el recinto pedido (de rojo) se observa la bondad de la solución obtenida para el área. Contando cuadraditos vemos que aproximadamente el área es 4 y pico unidades cuadradas.

Ejercicio 3

Sea P el punto $(0, 2, 2)$. Sea r la recta expresada de forma continua:

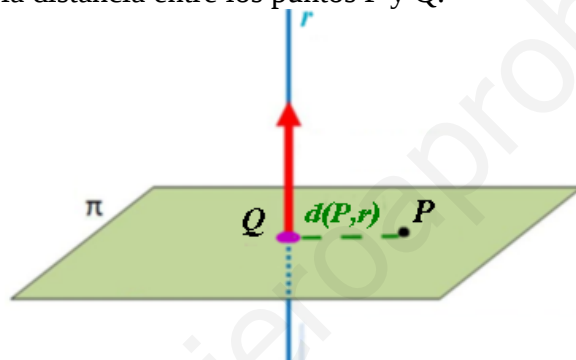
$$r: \frac{x-2}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$$

- 1) [0,75 PUNTOS] Escriba las ecuaciones paramétricas de la recta r .
- 2) [1,5 PUNTOS] Calcule la distancia de P a r .
- 3) [1 PUNTO] Calcule un plano perpendicular a r que pase por el punto P .

1)

$$r: \frac{x-2}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2} \Rightarrow r: \begin{cases} P_r(2, 0, -1) \in r \\ \vec{v}_r = (4, 1, 2) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 2 + 4\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$$

- 2) Hallamos el plano π perpendicular a la recta r que pasa por el punto P . Luego determinamos el punto Q donde se cortan recta y plano. La distancia del punto P a la recta r será el valor de la distancia entre los puntos P y Q .



El plano tendrá como vector normal el director de r .

$$\pi: \begin{cases} P(0, 2, 2) \in \pi \\ \vec{n} = \vec{v}_r = (4, 1, 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(0, 2, 2) \in \pi \\ 4x + y + 2z + D = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 + 2 + 4 + D = 0 \Rightarrow D = -6$$

$$\pi: 4x + y + 2z - 6 = 0$$

Averiguamos las coordenadas del punto Q de corte de la recta r y el plano π .

$$\pi: 4x + y + 2z - 6 = 0$$

$$r: \begin{cases} x = 2 + 4\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow 4(2 + 4\lambda) + \lambda + 2(-1 + 2\lambda) - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 + 16\lambda + \lambda - 2 + 4\lambda - 6 = 0 \Rightarrow 21\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow Q(2, 0, -1)$$

Obtenemos el valor de la distancia de P a r usando el módulo del vector que une P con Q .

$$\overrightarrow{PQ} = (2, 0, -1) - (0, 2, 2) = (2, -2, -3) \Rightarrow d(P, r) = d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}|$$

$$d(P, r) = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{17} = 4,12 \text{ u}$$

- 3) Determinado en el apartado anterior: $\pi: 4x + y + 2z - 6 = 0$

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1

Considere el sistema matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 3a & 2a & 2a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- 1) [2 PUNTOS] Determine los valores de a para que el sistema sea compatible.
 2) [1,25 PUNTOS] Calcule todas las soluciones en el caso en el que sea compatible indeterminado y en el caso $a=3$.

Para que sea compatible debe tener rango de la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 3a & 2a & 2a \end{pmatrix}$

igual que el rango de la ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 2 \\ 3a & 2a & 2a & 1 \end{pmatrix}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 3a & 2a & 2a \end{vmatrix} = 2a + 3a^2 + 2a - 3a - 2a - 2a^2 = a^2 - a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - a = 0 \Rightarrow a(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a - 1 = 0 \rightarrow a = 1 \end{cases}$$

Distinguimos tres situaciones diferentes.

Situación 1ª. $a \neq 0$ y $a \neq 1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el rango de A/B y el número de incógnitas, por lo que **el sistema es compatible determinado**.

Situación 2ª. $a = 0$.

En este caso el determinante de A es cero y su rango no es 3.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y su rango es 2 pues quitando la fila 3ª (todo ceros) y la

columna 1ª (igual que la 2ª) tenemos un menor de orden 2 con determinante no nulo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0.$$

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, tomamos el menor de orden 3 que

resulta de quitar la 1ª columna (igual que la 2ª) y su determinante vale

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 1 - 0 = -1 \neq 0. \text{ El rango de } A/B \text{ es } 3.$$

El sistema es incompatible pues $\text{rango de } A = 2 \neq 3 = \text{Rango de } A/B$.

Situación 3ª. $a = 1$.

En este caso planteamos la discusión usando el método de Gauss.

La matriz ampliada queda

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \\ \hline -1 \quad -1 \quad -1 \quad -2 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \\ \hline -3 \quad -3 \quad -3 \quad -6 \\ 0 \quad -1 \quad -1 \quad -5 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \{ \text{Cambiamos Fila } 3^a \text{ por Fila } 2^a \} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mirando las tres primeras columnas de la matriz tenemos una matriz equivalente a A y contamos 2 filas con algún elemento no nulo, por lo que el rango de A es 2. Y mirando la matriz completa equivalente a la matriz A/B contamos 2 filas con algún elemento no nulo, por lo que el rango de A/B es 2.

$\text{Rango de } A = 2 = \text{Rango de } A/B < 3 = \text{Número de incógnitas}$.

El sistema es compatible indeterminado.

- 1) El sistema es compatible para $a \neq 0$.
- 2) El sistema es compatible indeterminado para $a = 1$. Lo resolvemos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - y - z \\ 3x + 2y + 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(2 - y - z) + 2y + 2z = 1 \Rightarrow 6 - 3y - 3z + 2y + 2z = 1 \Rightarrow -y - z = -5 \Rightarrow \boxed{5 - z = y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 2 - (5 - z) - z = 2 - 5 + z - z = -3$$

$$\text{Solución: } x = -3; y = 5 - t; z = t$$

Ahora para $a=3$ el sistema es compatible determinado y podemos resolverlo por el método de Cramer.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 9 & 6 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 9 & 6 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{12 + 3 + 12 - 1 - 12 - 36}{6 + 27 + 6 - 9 - 6 - 18} = \frac{-22}{6} = -\frac{11}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 9 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 9 & 6 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{12 + 54 + 1 - 18 - 12 - 3}{6} = \frac{34}{6} = \frac{17}{3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 9 & 6 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 9 & 6 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{1 + 18 + 12 - 18 - 1 - 12}{6} = \frac{0}{6} = 0$$

La solución para $a = 3$ es $x = -11/3$; $y = 17/3$; $z = 0$.

Ejercicio 2

Tenemos la función definida a trozos:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x} & \text{si } x < 0 \\ 2x^3 - 15x^2 + 36x + 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1) [2 PUNTOS] Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función g en $\mathbb{R} - \{0\}$ y determine los máximos y mínimos relativos.

2) [0,5 PUNTOS] Determine si la función es continua en $x = 0$.

3) [1 PUNTO] Haga un esbozo del gráfico de la función en un entorno de $x = 0$.

1) Calculamos la derivada de la función en el intervalo $(-\infty, 0)$ y estudiamos su evolución.

$$g(x) = \frac{x+1}{x} \Rightarrow g'(x) = \frac{x - (x+1)}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-1}{x^2} = 0 \Rightarrow -1 = 0 \quad \text{¡¡Imposible!!}$$

La derivada de la función no se anula en este intervalo por lo que siempre es creciente o siempre decreciente.

Tomamos $x = -1$ y la derivada vale $g'(-1) = \frac{-1}{(-1)^2} = -1 < 0$. La función decrece en este punto y por tanto en todo el intervalo $(-\infty, 0)$.

Calculamos la derivada de la función en el intervalo $(0, +\infty)$ y estudiamos su evolución.

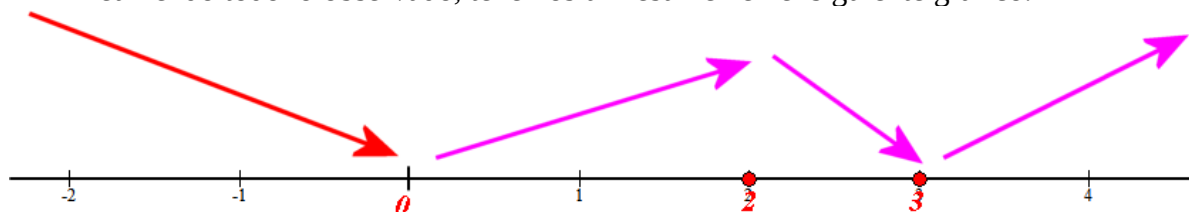
$$g(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 3 \Rightarrow g'(x) = 6x^2 - 30x + 36$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 30x + 36 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 = x \\ \frac{5-1}{2} = 2 = x \end{cases}$$

Veamos si la función crece o decrece antes de $x = 2$, entre 2 y 3, y, por último, después de 3.

- En $(0, 2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $g'(1) = 6 - 30 + 36 = 12 > 0$. La función crece en $(0, 2)$.
- En $(2, 3)$ tomamos $x = 2,5$ y la derivada vale $g'(2,5) = 6 \cdot 2,5^2 - 30 \cdot 2,5 + 36 = -1,5 < 0$. La función decrece en $(2, 3)$.
- En $(3, +\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $g'(4) = 6 \cdot 4^2 - 30 \cdot 4 + 36 = 12 > 0$. La función crece en $(3, +\infty)$.

Reuniendo todo lo observado, tenemos un resumen en el siguiente gráfico.



Para saber si la función presenta un mínimo en $x = 0$ debemos estudiar el comportamiento de la función en su entorno, pues no sabemos si es continua.

¿Es continua en $x = 0$?

- Existe el límite $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x^3 - 15x^2 + 36x + 3 = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{No existe}$

- Existe la función. No es necesario verlo.

- Son iguales. No es necesario verlo.

No es continua en $x = 0$. En este punto no presenta mínimo.

La función decrece en $(-\infty, 0) \cup (2, 3)$ y crece en $(0, 2) \cup (3, +\infty)$.

La función presenta un mínimo relativo en $x = 3$. Y un máximo relativo en $x = 2$.

2) Visto en el anterior apartado.

¿Es continua en $x = 0$?

- Existe el límite $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x^3 - 15x^2 + 36x + 3 = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{No existe}$

- Existe la función. No es necesario verlo.

- Son iguales. No es necesario verlo.

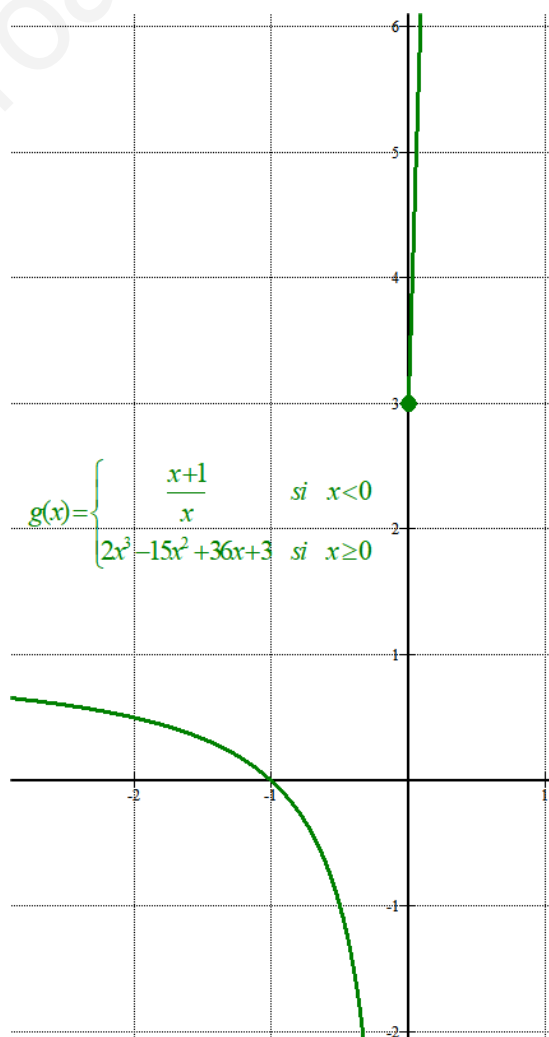
No es continua en $x = 0$.

3) Sabemos cómo se comporta la función en las proximidades de $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x^3 - 15x^2 + 36x + 3 = 3 \end{array} \right.$$

Hacemos una tabla de valores en el intervalo $[-2, 2]$ y dibujamos su gráfico.

x	$g(x)$
-2	0,5
-1	0
-0,5	-1
-0,1	-9
0	3
2	29



Ejercicio 3

Sean $A = (-2, 1, 0)$, $B = (1, 1, 1)$, $C = (2, 0, 2)$ tres puntos de $\mathbb{R}^3$.

1) [1 PUNTO] Calcule la ecuación implícita (general) del plano que pasa por A, B y C.

2) [1 PUNTO] Calcule la ecuación continua de la recta $\overline{BC}$.

3) [1 PUNTO] Calcule el área del triángulo definido por ABC.

4) [0,25 PUNTOS] Determine, usando el producto escalar, si los vectores $u = \overrightarrow{(3, 0, 1)}$ y $v = \overrightarrow{(4, -1, 2)}$ son ortogonales.

1) Hallamos dos vectores directores del plano y determinamos su ecuación.

$$\left. \begin{array}{l} B(1,1,1) \in \pi \\ \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1,1,1) - (-2,1,0) = (3,0,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (2,0,2) - (-2,1,0) = (4,-1,2) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$4(y-1) - 3(z-1) - 6(y-1) + (x-1) = 0$$

$$4y - 4 - 3z + 3 - 6y + 6 + x - 1 = 0$$

$$\boxed{\pi \equiv x - 2y - 3z + 4 = 0}$$

2) Hallamos su vector director y determinamos su ecuación continua.

$$\left. \begin{array}{l} B(1,1,1) \in r \\ \vec{u} = \overrightarrow{BC} = (2,0,2) - (1,1,1) = (1,-1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}}$$

3) El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores AB y AC.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1,1,1) - (-2,1,0) = (3,0,1) \\ \overrightarrow{AC} = (2,0,2) - (-2,1,0) = (4,-1,2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 4j - 3k - 6j + i = i - 2j - 3k = (1, -2, -3)$$

$$\text{Área } ABC = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{14}}{2} = 1,871 u^2}$$

4) Para que los vectores sean ortogonales su producto escalar debe ser cero.

$$u \cdot v = \overrightarrow{(3, 0, 1)} \cdot \overrightarrow{(4, -1, 2)} = 12 + 0 + 2 = 14 \neq 0$$

Por lo que no son ortogonales dichos vectores.