



**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD
LOMCE – JUNIO 2019**

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES AL ALUMNO

1. Debe escogerse una sola de las opciones.
2. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
3. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
4. **No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.**

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1

Considere el sistema $\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ t & -1 & 1 \\ t & 0 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dependiente del parámetro t .

- 1) [1.5 PUNTOS] Clasifique, en función del valor de t , el tipo de sistema.
- 2) [1 PUNTO] Calcule todas las soluciones del sistema en el caso $t = 1$.

Ejercicio 2

Considere la función $f(x) = (x+10)e^{2x}$.

- 1) [2.5 PUNTOS] Calcule una primitiva $F(x)$ tal que $F(0) = 0$. Use la derivada para comprobar su solución.
- 2) [0.5 PUNTOS] Calcule $\int_0^5 f(x)dx$.

Ejercicio 3

Tomemos el plano $\Pi \equiv 2x + ay + z = 2$ y la recta $r(t) \equiv (0, 0, 0) + t(2, 1, 1)$.

- 1) [0.5 PUNTOS] Determine a para que r y Π sean ortogonales.
- 2) [2 PUNTOS] Determine a para que r y Π sean paralelos. Calcule la distancia entre r y Π en este caso.

Ejercicio 4

Una prueba rápida para detectar una enfermedad da un 2% de falsos positivos (personas sanas en las que la prueba da positivo, clasificándolas como enfermas) y un 1% de falsos negativos (personas enfermas en las que la prueba da negativo, clasificándolas como sanas). En una población hay un 4% de enfermos.

- 1) [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de que el test dé un resultado negativo.
- 2) [1 PUNTO] La prueba da un resultado positivo (clasificando a la persona como enferma). Calcule la probabilidad de que realmente esté sana.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2**Ejercicio 1**

$$\text{Sean } M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

- 1) [0.5 PUNTOS] Calcule, razonadamente, el rango de M .
- 2) [2 PUNTOS] Determine todos los vectores v tales que $M^2 \cdot v = M^{-1} \cdot v$.

Ejercicio 2

$$\text{Sea la función } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{2x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{a - x^2}{2 + x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- 1) [1 PUNTOS] Determine, si existe, el valor de a que haga a la función continua en $x = 0$.
- 2) [1.5 PUNTOS] Calcule el valor de a para que f tenga un extremo relativo en $x = 2$. ¿Es este extremo un máximo o mínimo local?
- 3) [0.5 PUNTOS] Sea $g(x)$ una función integrable, si $\int_0^3 g(x)dx = 4$ y $\int_2^3 g(x)dx = 6$, ¿Cuánto vale $\int_0^2 g(x)dx$?

Ejercicio 3

$$\text{Sean las rectas } r_1 \equiv \begin{cases} y = 2 \\ 2x + z = 13 \end{cases}, r_2 \equiv \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - z = 3 \end{cases} \text{ y el punto } A = (0, 0, 3).$$

- 1) [2.5 PUNTOS] Calcule la ecuación general (implícita) del plano que pasa por A y es paralelo a r_1 y a r_2 .

Ejercicio 4

El peso de una población sigue una distribución normal de media 70 kg y desviación típica de 10 kg.

- 1) [1 PUNTO] Calcule el porcentaje de población que pesa entre 65 y 75 kg.
- 2) [1 PUNTO] Calcule el porcentaje de población que pesa al menos 85 kg.

SOLUCIONES

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1

Considere el sistema $\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ t & -1 & 1 \\ t & 0 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dependiente del parámetro t .

1) [1.5 PUNTOS] Clasifique, en función del valor de t , el tipo de sistema.

2) [1 PUNTO] Calcule todas las soluciones del sistema en el caso $t = 1$.

1) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ t & -1 & 1 \\ t & 0 & t \end{vmatrix} = -t^2 + t + t - t^2 = -2t^2 + 2t$$

Iguálamos a cero.

$$|A| = 0 \Rightarrow -2t^2 + 2t = 0 \Rightarrow -2t(t-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1 \end{cases}$$

Hay tres casos distintos.

CASO 1. $t \neq 0$ y $t \neq 1$

En este caso el rango de la matriz de los coeficientes es 3 al igual que la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado.

CASO 2. $t = 0$

El sistema queda

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \{\text{Sumamos las ecuaciones}\} \Rightarrow 2z = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$y + 0 = 0 \Rightarrow y = 0$$

El sistema es compatible indeterminado. Las soluciones son $x = t$; $y = 0$; $z = 0$.

CASO 3. $t = 1$

El sistema queda

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -z + y + z = 0 \\ -z - y + z = 0 \\ x = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -y = 0 \\ x = -z \end{cases}$$

La solución es $x = -t$; $y = 0$; $z = t$

El sistema es compatible indeterminado.

2) Calculado en el apartado anterior. La solución es $x = -t$; $y = 0$; $z = t$

Ejercicio 2

Considere la función $f(x) = (x+10)e^{2x}$.

1) [2.5 PUNTOS] Calcule una primitiva $F(x)$ tal que $F(0) = 0$. Use la derivada para comprobar su solución.

2) [0.5 PUNTOS] Calcule $\int_0^5 f(x)dx$.

1)

$$F(x) = \int f(x)dx = \int (x+10)e^{2x}dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integramos por partes} \\ u = x+10 \rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x}dx \rightarrow v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right\} =$$

$$= (x+10)\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx = (x+10)\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x}dx = (x+10)\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$F(x) = \frac{e^{2x}}{2} \left(x+10 - \frac{1}{2} \right) = \frac{e^{2x}}{2} \left(x + \frac{19}{2} \right) + C$$

$$\text{Como debe cumplir } F(0) = 0 \Rightarrow F(0) = \frac{e^0}{2} \left(0 + \frac{19}{2} \right) + C = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{19}{2} \right) + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{19}{4}$$

$$\text{La primitiva pedida es } F(x) = \frac{e^{2x}}{2} \left(x + \frac{19}{2} \right) - \frac{19}{4}$$

2)

$$\int_0^5 f(x)dx = \int_0^5 (x+10)e^{2x}dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} \left(x + \frac{19}{2} \right) \right]_0^5 =$$

$$= \left[\frac{e^{10}}{2} \left(5 + \frac{19}{2} \right) \right] - \left[\frac{e^0}{2} \left(0 + \frac{19}{2} \right) \right] =$$

$$= \frac{e^{10}}{2} \cdot \frac{29}{2} - \frac{19}{4} = \boxed{\frac{29e^{10} - 19}{4}}$$

Ejercicio 3

Tomemos el plano $\Pi \equiv 2x + ay + z = 2$ y la recta $r(t) \equiv (0,0,0) + t(2,1,1)$.

1) [0.5 PUNTOS] Determine a para que r y Π sean ortogonales.

2) [2 PUNTOS] Determine a para que r y Π sean paralelos. Calcule la distancia entre r y Π en este caso.

1) El vector normal del plano es $\vec{n} = (2, a, 1)$ y el director de la recta es $\vec{v} = (2, 1, 1)$.

Para que sean ortogonales el vector normal y el director deben ser paralelos y sus coordenadas deben ser proporcionales.

$$\frac{2}{2} = \frac{a}{1} = \frac{1}{1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{2} = \frac{a}{1} \Rightarrow 2 = a \Rightarrow a = 2 \\ \frac{a}{1} = \frac{1}{1} \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

Para ser ortogonales debe ser $a = 1$

2) El vector normal del plano es $\vec{n} = (2, a, 1)$ y el director de la recta es $\vec{v} = (2, 1, 1)$.

Su producto escalar vale $\vec{n} \cdot \vec{v} = (2, a, 1)(2, 1, 1) = 4 + a + 1 = 5 + a$. Este producto escalar es 0 cuando $a = -5$. En este caso veamos si son paralelos.

El punto $P(0,0,0)$ de la recta ¿está en el plano?

$\Pi \equiv 2x + ay + z = 2 \Rightarrow \begin{cases} \text{¿}0+0+0=2\text{?} \end{cases}$ No. La recta no está contenida en el plano, sino que es paralela cuando $a = -5$.

La distancia entre recta y plano (cuando son paralelos) es la distancia entre un punto cualquiera de la recta y el plano.

$$d(r, \Pi) = d((0,0,0), \Pi) = \frac{|0+0+0-2|}{\sqrt{2^2+5^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{30}} u$$

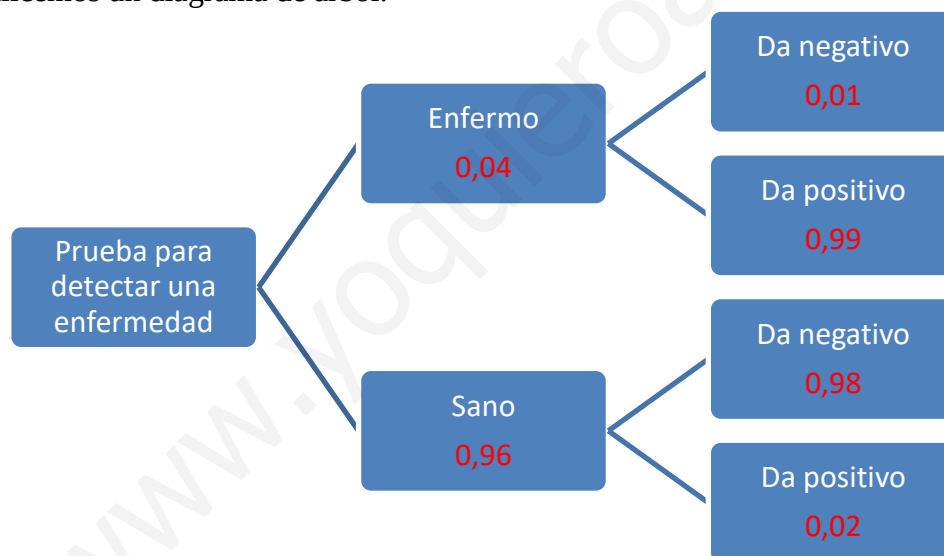
Ejercicio 4

Una prueba rápida para detectar una enfermedad da un 2% de falsos positivos (personas sanas en las que la prueba da positivo, clasificándolas como enfermas) y un 1% de falsos negativos (personas enfermas en las que la prueba da negativo, clasificándolas como sanas). En una población hay un 4% de enfermos.

1) [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de que el test dé un resultado negativo.

2) [1 PUNTO] La prueba da un resultado positivo (clasificando a la persona como enferma). Calcule la probabilidad de que realmente esté sana.

Realicemos un diagrama de árbol.



1) $P(\text{Dé negativo}) = P(\text{Enfermo}) \cdot P(\text{Dé negativo} / \text{Enfermo}) + P(\text{Sano}) \cdot P(\text{Dé negativo} / \text{Sano}) = 0,04 \cdot 0,01 + 0,96 \cdot 0,98 = \underline{0,9412}$

2)

$$P(\text{Esté sana} / \text{Ha dado positivo}) = \frac{P(\text{Esté sana} \cap \text{Ha dado positivo})}{P(\text{Ha dado positivo})} = \frac{0,96 \cdot 0,02}{1 - 0,9412} = \frac{0,0192}{0,0588} = 0,3265$$

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1

Sean $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

1) [0.5 PUNTOS] Calcule, razonadamente, el rango de M .

2) [2 PUNTOS] Determine todos los vectores v tales que $M^2 \cdot v = M^{-1} \cdot v$.

1) Calculemos el determinante de la matriz M .

$$|M| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 1 + 6 = 1 \neq 0. \text{ El rango de } M \text{ es } 3$$

2) Calculemos la inversa de M .

$$M^{-1} = \frac{\text{Adj}(M^t)}{|M|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3 & -1+2 & 1 \\ 3-6-1 & -3+4 & 2+2 \\ 1-2 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M^2 \cdot v = M^{-1} \cdot v \Rightarrow M^2 \cdot v - M^{-1} \cdot v = 0 \Rightarrow (M^2 - M^{-1})v = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2-4 & 1+2 & 1-1 \\ -4-5 & 1+2 & 4-1 \\ -1-2 & -1+1 & 4-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ -9 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El determinante de esta matriz es

$$\begin{vmatrix} -6 & 3 & 0 \\ -9 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -54 - 27 + 81 = 0$$

Como el sistema es homogéneo, entonces es compatible indeterminado.

$$\left. \begin{array}{l} -6x + 3y = 0 \\ -9x + 3y + 3z = 0 \\ -3x + 3z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a = \text{Ecuación } 1^a + \text{Ecuación } 3^a \\ \text{Elimino la ecuación } 2^a \\ \text{Simplifico ecuación } 1^a \text{ y ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2x + y = 0 \\ -x + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 2x \\ z = x \end{array} \right\}$$

La solución es $x = t$; $y = 2t$; $z = t$. El vector v es $(t, 2t, t)$, siendo t cualquier valor real.

Ejercicio 2

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{2x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{a - x^2}{2 + x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

1) [1 PUNTOS] Determine, si existe, el valor de a que haga a la función continua en $x = 0$.

2) [1.5 PUNTOS] Calcule el valor de a para que f tenga un extremo relativo en $x = 2$. ¿Es este extremo un máximo o mínimo local?

3) [0.5 PUNTOS] Sea $g(x)$ una función integrable, si $\int_0^3 g(x)dx = 4$ y $\int_2^3 g(x)dx = 6$, ¿Cuánto vale $\int_0^2 g(x)dx$?

1) Para que sea continua en $x = 0$ deben cumplirse:

- Existe $f(0) = \frac{a - 0^2}{2 + 0} = \frac{a}{2}$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a - x^2}{2 + x} = \frac{a}{2}$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(x)}{2x} = \frac{0}{0} = \{\text{Indeterminación} \rightarrow \text{Aplico L'Hôpital}\} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}$
- Los tres valores son iguales. $\frac{a}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{a = 1}$

2) En el entorno de $x = 2$ la función es $f(x) = \frac{a - x^2}{2 + x}$. Su derivada es

$$f'(x) = \frac{-2x(2+x) - 1(a - x^2)}{(2+x)^2} = \frac{-4x - 2x^2 - a + x^2}{(2+x)^2} = \frac{-x^2 - 4x - a}{(2+x)^2}.$$

Para que sea $x = 2$ un extremo debe anular la derivada.

$$f'(2) = 0 \Rightarrow \frac{-2^2 - 4 \cdot 2 - a}{(2+2)^2} = 0 \Rightarrow -4 - 8 - a = 0 \Rightarrow a = -12$$

Si $f'(x) = \frac{-x^2 - 4x + 12}{(2+x)^2}$ en un valor menor que $x = 2$, por ejemplo $x = 1$ la derivada vale

$$f'(1) = \frac{-1^2 - 4 + 12}{(2+1)^2} = \frac{7}{9} > 0.$$

Si $f'(x) = \frac{-x^2 - 4x + 12}{(2+x)^2}$ en un valor mayor que $x = 2$, por ejemplo $x = 3$ la derivada vale

$$f'(3) = \frac{-3^2 - 12 + 12}{(2+3)^2} = \frac{-9}{25} < 0.$$

En $x = 2$ hay un máximo, pues antes de este valor crece y luego decrece.

3)

$$\int_0^2 g(x)dx = \int_0^3 g(x)dx - \int_2^3 g(x)dx = 4 - 6 = -2$$

Ejercicio 3

Sean las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} y = 2 \\ 2x + z = 13 \end{cases}$, $r_2 \equiv \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - z = 3 \end{cases}$ y el punto $A = (0, 0, 3)$.

1) [2.5 PUNTOS] Calcule la ecuación general (implícita) del plano que pasa por A y es paralelo a r_1 y a r_2 .

El vector director de la recta $r_1 \equiv \begin{cases} y = 2 \\ 2x + z = 13 \end{cases}$ es el producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen.

$$\vec{v}_{r_1} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i - 2k = (1, 0, -2)$$

El vector director de la recta $r_2 \equiv \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - z = 3 \end{cases}$ es el producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen.

$$\vec{v}_{r_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2i - 2k + j = (-2, 1, -2)$$

Estos vectores no son paralelos y las rectas se cortan o cruzan.

Si el plano es paralelo a las rectas su vector normal es el producto vectorial de ambos vectores.

$$\vec{n} = \vec{v}_{r_1} \times \vec{v}_{r_2} = (1, 0, -2) \times (-2, 1, -2) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 4j + k + 2j + 2i = 2i + 6j + k = (2, 6, 1)$$

El plano tiene ecuación $2x + 6y + z + D = 0$. Como pasa por $A(0, 0, 3)$ entonces:

$$2 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 3 + D = 0 \Rightarrow D = -3$$

El plano buscado es $\boxed{2x + 6y + z - 3 = 0}$

Ejercicio 4

El peso de una población sigue una distribución normal de media 70 kg y desviación típica de 10 kg.

1) [1 PUNTO] Calcule el porcentaje de población que pesa entre 65 y 75 kg.

2) [1 PUNTO] Calcule el porcentaje de población que pesa al menos 85 kg.

X = Peso de una persona. $X = N(70, 10)$

1)

$$\begin{aligned}P(65 < X < 75) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{65-70}{10} < \frac{X-70}{10} < \frac{75-70}{10}\right) = \\&= P(-0,5 < Z < 0,5) = P(Z < 0,5) - P(Z < -0,5) = \\&= P(Z < 0,5) - [1 - P(Z < 0,5)] = \\&= 0,6915 - [1 - 0,6915] = \\&= 0,383\end{aligned}$$

El porcentaje de población es de 38,3%

2)

$$\begin{aligned}P(X > 85) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{X-70}{10} > \frac{85-70}{10}\right) = \\&= P(Z > 1,5) = 1 - P(Z < 1,5) = 1 - 0,9332 = \boxed{0,0668}\end{aligned}$$

El porcentaje de población es de 6,68 %