UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
LOMCE – JULIO 2020
MATEMÁTICAS II

INDICACIONES AL ALUMNO

1. Debe escoger sólo cuatro ejercicios elegidos entre los ocho de que consta el examen.
2. Si realiza más de cuatro ejercicios sólo se corregirán los cuatro primeros, según el orden que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.
3. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
4. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
5. **No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.**

Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Considera la ecuación $AXA^t = B$ en donde $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, y A^t denota traspuesta de A.

1) [0.5 PUNTOS] Despeja la matriz X en la igualdad dada.
2) [0.5 PUNTOS] Comprueba que A es invertible y calcula su inversa.
3) [0.5 PUNTOS] Comprueba que $\left(A^{-1}\right)^t = \left(A^t\right)^{-1}$
4) [1 PUNTO] Calcula X.

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS] Considera la función $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$

1) [0.5 PUNTOS] Calcula la derivada primera.
2) [0.5 PUNTOS] Calcula la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f(x)* en el punto de abscisa $x = \pi$
3) [0.5 PUNTOS] Calcula las asíntotas.
4) [1 PUNTO] Calcula $\lim_{x \to 0} f(x)$

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Se emite un rayo láser desde el punto $P = (1,2,8)$ en la dirección del vector $\vec{v} = (1,2,-3)$. El plano $-x - y + 3z = -8$ determina la posición de una lámina de grandes dimensiones.

1) [0.5 PUNTOS] Calcula la ecuación de la recta que contiene al rayo láser.
2) [1 PUNTO] Determina la posición relativa de rayo y lámina.
3) [1 PUNTO] Se quiere situar otra lámina que sea ortogonal al rayo y pase por el origen. Calcula la ecuación del plano de esta lámina.

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

Un determinado test rápido para anticuerpos de COVID-19 consigue detectar concentraciones iguales o superiores a 10 U, en donde U son unidades de concentración de anticuerpos. De esta forma, concentraciones iguales o superiores a 10 U dan un resultado positivo, mientras que concentraciones inferiores a 10 U dan un resultado negativo en el test. Suponemos que la concentración de anticuerpos sigue una distribución normal con media 20 U y desviación típica 5 U y que todas las personas que han pasado la enfermedad han desarrollado anticuerpos.

1) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que una persona que ha pasado la enfermedad de negativo en el test.
2) [1.25 PUNTOS] Calcula qué concentraciones debería detectar el test para que la probabilidad calculada en el apartado anterior fuese del 1%.

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

En un juego de mesa se pueden comprar tanques, submarinos y aviones por 1, 3 y 5 diamantes, respectivamente. El rival ha gastado 41 diamantes. Sabemos que tiene el doble de submarinos que de tanques, y que el número de submarinos más el de aviones es 10.

1) [1 PUNTO] Con la información dada, plantea un sistema de ecuaciones para hallar el número de tanques, submarinos y aviones que tiene el rival.
2) [0.5 PUNTOS] Clasifica el sistema.
3) [1 PUNTO] Resuelve el sistema.

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considera la función $f(x)=\dfrac{2}{x^2}$.

1) [1 PUNTO] Calcula el dominio y las asíntotas de *f(x)*.
2) [0.5 PUNTOS] Halla una primitiva de *f(x)*.
3) [1 PUNTO] Calcula el área de la región limitada por la función $y=f(x)$, las rectas $x=1$, $x=2$ y el eje *OX* de abscisas.

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Considera los puntos $A(1,2,1)$, $B(2,3,-4)$, $C(4,3,2)$.

1) [0.5 PUNTOS] Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos *A* y *B*.
2) [1 PUNTO] Halla la ecuación del plano que contiene los tres puntos.
3) [1 PUNTO] Calcula el área del triángulo que forman los tres puntos.

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

En un concurso de televisión el premio consiste en lanzar de forma independiente un dado cúbico y una moneda (suponemos que ambos son perfectos). Por cada punto obtenido con el dado sumamos 100 € (si sacamos un 1 ganamos 100 €, si sacamos un 2 ganamos 200 €, etc.) y si en la moneda sale “Cara” sumamos 300 € adicionales.

1) [1 PUNTO] Calcula la probabilidad de ganar exactamente 400 €.
2) [0.5 PUNTOS] Calcula la probabilidad de ganar 400 € si sabemos que ha salido “Cara” en la moneda.
3) [1 PUNTO] Calcula la probabilidad de que haya salido “Cara” sabiendo que hemos ganado 400 €.

SOLUCIONES

Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Considera la ecuación $AXA^t = B$ en donde $A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, y A^t denota traspuesta de A.

1) [0.5 PUNTOS] Despeja la matriz X en la igualdad dada.
2) [0.5 PUNTOS] Comprueba que A es invertible y calcula su inversa.
3) [0.5 PUNTOS] Comprueba que $\left(A^{-1}\right)^t = \left(A^t\right)^{-1}$
4) [1 PUNTO] Calcula X.

1) Comprobemos si la matriz A y A^t son invertibles.

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix}-2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} = -2 \neq 0, \text{ Existe la inversa de A.}$$

$$A^t=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \left|A^t\right| = \begin{vmatrix}-2 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} = -2 \neq 0, \text{ Existe la inversa de } A^t.$$

$$AXA^t = B \Rightarrow A^{-1}AXA^t\left(A^t\right)^{-1} = A^{-1}B\left(A^t\right)^{-1} \Rightarrow X = A^{-1}B\left(A^t\right)^{-1}$$

2) $$A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix}-2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} = -2 \neq 0, \text{ Existe la inversa de A.}$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}}{-2} = \frac{\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & -2\end{pmatrix}}{-2} = \begin{pmatrix}-1/2 & 0\\ 1/2 & 1\end{pmatrix}$$

3) Calculamos la inversa de A^t.

$$\left(A^t\right)^{-1} = \frac{Adj\left(\left(A^t\right)^t\right)}{\left|A^t\right|} = \frac{Adj\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}}{-2} = \frac{\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & -2\end{pmatrix}}{-2} = \begin{pmatrix}-1/2 & 1/2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Además $A^{-1} = \begin{pmatrix}-1/2 & 0\\ 1/2 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \left(A^{-1}\right)^t = \begin{pmatrix}-1/2 & 1/2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Con lo que queda comprobada la igualdad $\left(A^{-1}\right)^t = \left(A^t\right)^{-1}$

4)

$$X = A^{-1}B\left(A^t\right)^{-1} \Rightarrow X = \begin{pmatrix}-1/2 & 0\\ 1/2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/2 & 1/2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/2 & 1/2\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1/2 & -1/2+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1/2 & 5/2\end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS] Considera la función $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$

1) [0.5 PUNTOS] Calcula la derivada primera.

2) [0.5 PUNTOS] Calcula la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f(x)* en el punto de abscisa $x=\pi$

3) [0.5 PUNTOS] Calcula las asíntotas.

4) [1 PUNTO] Calcula $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

1) $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x} \Rightarrow f\,'(x)=\dfrac{\cos(x)\cdot x-1\cdot\sin(x)}{x^2}=\dfrac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2}$

2) El valor de la pendiente de la recta tangente es el valor de la derivada en $x=\pi$.

$$f\,'(\pi)=\frac{\pi\cos(\pi)-\sin(\pi)}{\pi^2}=\frac{-\pi-0}{\pi^2}=\frac{-1}{\pi}$$

3) El dominio de la función $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$ es $\mathbb{R}-\{0\}$.

Asíntota vertical. $x=a$

¿ $x=0$ es asíntota?

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1}=\cos 0=1$$

No es asíntota. No tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal. $y=b$

$b=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin(x)}{x}=0,$ pues el sin(x) se mantiene con valores entre -1 y 1, mientras que x va tomando valores cada vez más grandes. El cociente tiende a 0.

$y=0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

No tiene, pues tiene horizontal.

4)

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1}=\cos 0=1$$

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Se emite un rayo láser desde el punto $P=(1,2,8)$ en la dirección del vector $\vec{v}=(1,2,-3)$. El plano $-x-y+3z=-8$ determina la posición de una lámina de grandes dimensiones.

1) [0.5 PUNTOS] Calcula la ecuación de la recta que contiene al rayo láser.

2) [1 PUNTO] Determina la posición relativa de rayo y lámina.

3) [1 PUNTO] Se quiere situar otra lámina que sea ortogonal al rayo y pase por el origen. Calcula la ecuación del plano de esta lámina.

1)

$$\left.\begin{array}{l} P=(1,2,8)\in r \\ \vec{v}=(1,2,-3) \end{array}\right\} \Rightarrow r:\left\{\begin{array}{c} x=1+\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=8-3\lambda \end{array}\right.$$

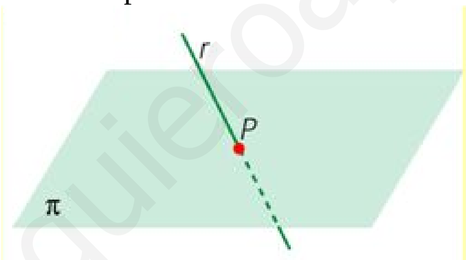
2) El plano tiene ecuación $-x-y+3z=-8$, su vector normal es $\vec{n}=(-1,-1,3)$.

La recta tiene vector director $\vec{v}=(1,2,-3)$

Veamos si son ortogonales.

$$\vec{n}\cdot\vec{v}=(1,2,-3)\cdot(-1,-1,3)=-1-2+9=6\neq 0$$

Los vectores no son ortogonales, plano y recta no son ni paralelos ni coincidentes.
Luego plano y recta se cortan en un punto.



3) Si la lámina debe ser ortogonal al rayo dicho plano (el de la lámina) tiene como vector normal el director del rayo $\vec{v}=(1,2,-3)$ y pasa por el punto O(0,0,0).

$$\left.\begin{array}{l} O(0,0,0)\in\pi' \\ \vec{n}=\vec{v}=(1,2,-3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} O(0,0,0)\in\pi' \\ \pi'\equiv x+2y-3z+D=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0+0-0+D=0 \Rightarrow D=0$$

$$\boxed{\pi'\equiv x+2y-3z=0}$$

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

Un determinado test rápido para anticuerpos de COVID-19 consigue detectar concentraciones iguales o superiores a 10 U, en donde U son unidades de concentración de anticuerpos. De esta forma, concentraciones iguales o superiores a 10 U dan un resultado positivo, mientras que concentraciones inferiores a 10 U dan un resultado negativo en el test. Suponemos que la concentración de anticuerpos sigue una distribución normal con media 20 U y desviación típica 5 U y que todas las personas que han pasado la enfermedad han desarrollado anticuerpos.

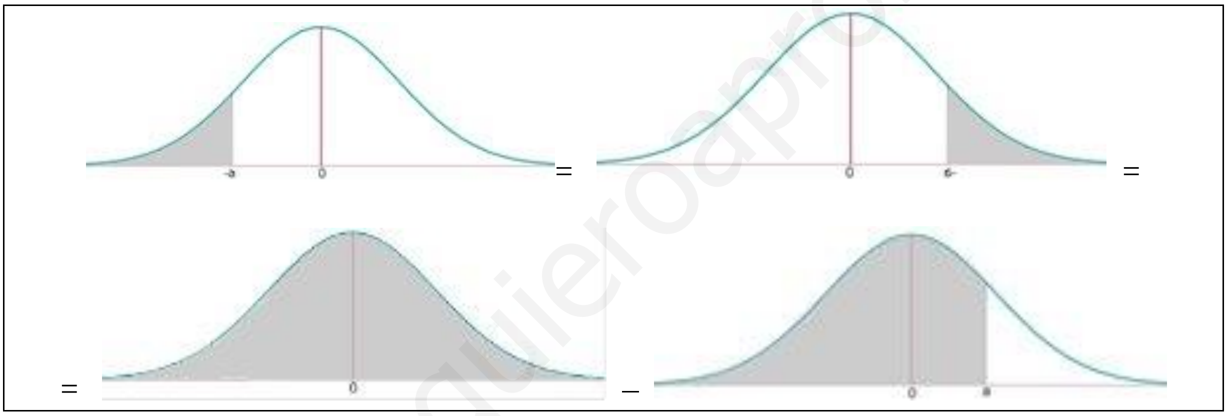
1) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que una persona que ha pasado la enfermedad de negativo en el test.

2) [1.25 PUNTOS] Calcula qué concentraciones debería detectar el test para que la probabilidad calculada en el apartado anterior fuese del 1%.

X = Concentración de anticuerpos
X = N(20, 5)

1) Dar negativo significa obtener una concentración menor de 10 U.

$$P(X<10)=\{Tipificamos\}=P\left(Z<\frac{10-20}{5}\right)=P(Z<-2)=$$



$$=P(Z>2)=1-P(Z<2)=1-0.9772=\boxed{0.0228}$$

2) Nos piden la concentración (a) en lugar de 10 U para que $P(X<a)=0,01$.

$$P(X<a)=0,01\Rightarrow P\left(Z<\frac{a-20}{5}\right)=0,01\Rightarrow P\left(Z>-\frac{a-20}{5}\right)=0,01\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-P\left(Z<-\frac{a-20}{5}\right)=0,01\Rightarrow P\left(Z<-\frac{a-20}{5}\right)=1-0.01=0.99$$

$$\{\text{Buscamos 0.99 en la tabla N(0,1)}\}\rightarrow -\frac{a-20}{5}=\frac{2.32+2.33}{2}=2.325$$

$$-a+20=11.625\Rightarrow -a=-8.375\Rightarrow \boxed{a=8.375}$$

Concentraciones de 8.375 U las detecta con una probabilidad del 1%

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

En un juego de mesa se pueden comprar tanques, submarinos y aviones por 1, 3 y 5 diamantes, respectivamente. El rival ha gastado 41 diamantes. Sabemos que tiene el doble de submarinos que de tanques, y que el número de submarinos más el de aviones es 10.

1) [1 PUNTO] Con la información dada, plantea un sistema de ecuaciones para hallar el número de tanques, submarinos y aviones que tiene el rival.

2) [0.5 PUNTOS] Clasifica el sistema.

3) [1 PUNTO] Resuelve el sistema.

1) Llamemos "x" al número de tanques comprados, "y" al número de submarinos y "z" al número de aviones.
"*El rival ha gastado 41 diamantes*" → $x+3y+5z=41$
"*Tiene el doble de submarinos que de tanques*" → $y=2x$
"*El número de submarinos más el de aviones es 10*" → $y+z=10$

Reuniendo las ecuaciones nos queda el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+3y+5z=41 \\ y=2x \\ y+z=10 \end{array}\right\}$$

2) Aplicamos Gauss.

$$\left.\begin{array}{r} x+3y+5z=41 \\ -2x+y\qquad=0 \\ y+z=10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^{\text{a}} + 2\cdot \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ -2x \quad +y \qquad\qquad =0 \\ \underline{2x \quad +6y \quad +10z \quad =82} \\ \qquad 7y \quad +10z \quad =82 \to \text{Nueva ecuación } 2^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y+5z=41 \\ 7y+10z=82 \\ y+z=10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^{\text{a}} - 7\cdot \text{Ecuación } 3^{\text{a}} \\ 7y \quad +10z \quad = \quad 82 \\ \underline{-7y \quad -7z \quad = \quad -70} \\ \qquad 3z \quad = \quad 12 \to \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y+5z=41 \\ 7y+10z=82 \\ 3z=12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y+5z=41 \\ 7y+10z=82 \\ z=4 \end{array}\right\}$$

Este sistema es **compatible determinado**. Tiene solución única.

3) Terminamos de resolver el sistema a partir de lo obtenido en el apartado 2)

$$\left.\begin{array}{r} x+3y+5z=41 \\ 7y+10z=82 \\ \boxed{z=4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y+20=41 \\ 7y+40=82 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y=21 \\ 7y=42 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x+3y=21 \\ \boxed{y=6} \end{array}\right\} \Rightarrow x+18=21 \Rightarrow \boxed{x=3}$$

Tiene 3 tanques, 6 submarinos y 4 aviones.

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considera la función $f(x)=\frac{2}{x^2}$.

1) [1 PUNTO] Calcula el dominio y las asíntotas de *f(x)*.
2) [0.5 PUNTOS] Halla una primitiva de *f(x)*.
3) [1 PUNTO] Calcula el área de la región limitada por la función $y=f(x)$, las rectas $x=1$, $x=2$ y el eje *OX* de abscisas.

1) El dominio de la función $f(x)=\frac{2}{x^2}$ es $\mathbb{R}-\{0\}$, pues *x = 0* anula el denominador.

Asíntota vertical. $x=a$
¿$x=0$ es asíntota?

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x^2}=\frac{2}{0}=\infty$$

$x=0$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}=\frac{2}{\infty}=0$$

$y=0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$
No tiene por tener una asíntota horizontal.

2) $F(x)=\int f(x)dx$

$$F(x)=\int f(x)dx=\int\frac{2}{x^2}dx=2\int x^{-2}dx=2\frac{x^{-1}}{-1}=\boxed{-\frac{2}{x}+C}$$

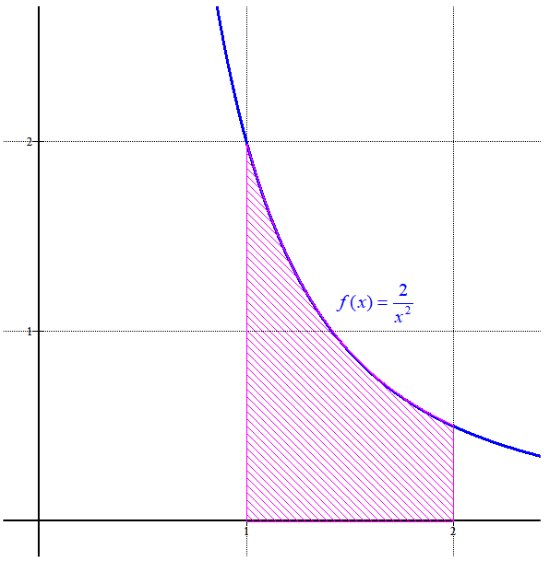
3) Comprobemos si la función corta el eje de abscisas.

$f(x)=0\Rightarrow\frac{2}{x^2}=0\Rightarrow 2=0,$ Imposible. No corta el eje OX

Como la función es siempre positiva, el área de la región es la integral definida entre 1 y 2 de $f(x)=\frac{2}{x^2}$.

$$Área=\int_1^2\frac{2}{x^2}dx=\left[\frac{-2}{x}\right]_1^2=$$

$$=\left[\frac{-2}{2}\right]-\left[\frac{-2}{1}\right]=-1+2=1\,u^2$$



Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Considera los puntos $A(1,2,1)$, $B(2,3,-4)$, $C(4,3,2)$.

1) [0.5 PUNTOS] Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos *A* y *B*.
2) [1 PUNTO] Halla la ecuación del plano que contiene los tres puntos.
3) [1 PUNTO] Calcula el área del triángulo que forman los tres puntos.

1) Si la recta pasa por A y B tiene vector director $\overrightarrow{AB}=(2,3,-4)-(1,2,1)=(1,1,-5)$.

$$\left.\begin{array}{l} A(1,2,1)\in r \\ \vec{v}=\overrightarrow{AB}=(1,1,-5)\end{array}\right\}\Rightarrow r\equiv\left.\begin{array}{r} x=1+\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=1-5\lambda\end{array}\right\}$$

2) El plano que contiene a los 3 puntos tiene como vectores directores $\overrightarrow{AB}=(1,1,-5)$ y $\overrightarrow{AC}=(4,3,2)-(1,2,1)=(3,1,1)$

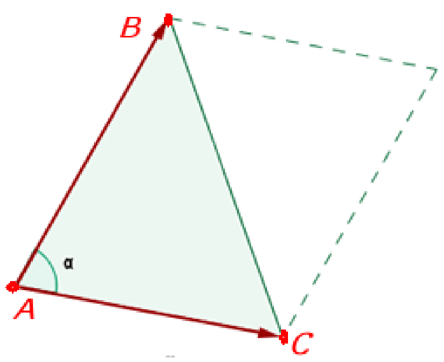
$$\left.\begin{array}{l} A(1,2,1)\in \pi \\ \vec{u}=\overrightarrow{AB}=(1,1,-5) \\ \vec{v}=\overrightarrow{AC}=(3,1,1)\end{array}\right\}\Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$$

$$x-1-15y+30+z-1-3z+3-y+2+5x-5=0$$
$$6x-16y-2z+28=0$$
$$\boxed{\pi\equiv 3x-8y-z+14=0}$$

3) El área del triángulo con vértices A, B y C es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}=(1,1,-5)$ y $\overrightarrow{AC}=(3,1,1)$.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(1,1,-5)\times(3,1,1)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}=i-15j+k-3k-j+5i=6i-16j-2k=(6,-16,-2)$$

$$Área=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}=\frac{|(6,-16,-2)|}{2}=\frac{\sqrt{6^2+(-16)^2+(-2)^2}}{2}=\boxed{\frac{\sqrt{296}}{2}=\sqrt{74}=8,6\,u^2}$$



Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

En un concurso de televisión el premio consiste en lanzar de forma independiente un dado cúbico y una moneda (suponemos que ambos son perfectos). Por cada punto obtenido con el dado sumamos 100 € (si sacamos un 1 ganamos 100 €, si sacamos un 2 ganamos 200 €, etc.) y si en la moneda sale "Cara" sumamos 300 € adicionales.

1) [1 PUNTO] Calcula la probabilidad de ganar exactamente 400 €.

2) [0.5 PUNTOS] Calcula la probabilidad de ganar 400 € si sabemos que ha salido "Cara" en la moneda.

3) [1 PUNTO] Calcula la probabilidad de que haya salido "Cara" sabiendo que hemos ganado 400 €.

1) Para ganar exactamente 400 € podemos ganar 100 con el dado y 300 con la moneda o bien 400 con el dado y nada con la moneda.
La probabilidad pedida es la suma de las probabilidades de que pasen los dos sucesos anteriores.
P(Ganar 400 €) =
= P(Ganar 100 con dado y ganar 300 con la moneda) + P(Ganar 400 con dado y no ganar nada con la moneda) =
= P(Salga 1 en el dado y Cara en la moneda) + P(Salga 4 en el dado y Cruz en la moneda) =
= P(Salga 1 en el dado) · P(Cara en la moneda) + P(Salga 4 en el dado) · P(Cruz en la moneda) =

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{12}=\boxed{\frac{1}{6}=0.166}$$

2) Si ha salido "Cara" en el dado hemos ganado 300 €, por lo que solo faltan 100 € para obtener un premio total de 400 €, por lo que esta probabilidad es la misma que la de sacar un 1 en el dado, por lo que vale $\boxed{\frac{1}{6}=0.166}$

3) Es una probabilidad a posteriori, utilizamos el teorema de Bayes.

$$P\left(\text{Haya salido cara/ Ganado 400 €}\right)=\frac{P\left(\text{Salga cara } \cap \text{ Ganamos 400 €}\right)}{P\left(\text{Ganar 400 €}\right)}=$$

$$=\frac{P\left(\text{Salga cara en la moneda}\right)P\left(\text{Salga 1 en el dado}\right)}{P\left(\text{Ganar 400 €}\right)}=\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}}=\boxed{\frac{1}{2}=0.5}$$