UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – SEPTIEMBRE 2017

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INDICACIONES

Elija una de las dos opciones.

No se admitirá ningún resultado si no está debidamente razonado.

No se permiten calculadoras gráficas, ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]

A. [3 PUNTOS] Resolver la ecuación matricial $(A+X)B = C$ con

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\quad y\quad C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 4 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

B. [0,5 PUNTOS] Dada la matriz $M=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$ con determinante $|M|=8$, calcular:

B1. [0,25 PUNTOS] $\begin{vmatrix}a & d & g\\ b & e & h\\ c & f & i\end{vmatrix}$

B2. [0,25 PUNTOS] $\begin{vmatrix}4a & -3b & c\\ 4d & -3e & f\\ 4g & -3h & i\end{vmatrix}$

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

A. [1,75 PUNTOS] El representante de una firma de perfumes tiene un sueldo fijo mensual de 1500 euros. También recibe una comisión, $-0.05x^2 + 0.7x + 30$, que depende del número de tiendas, x, que incluye al mes en su cartera de clientes. Por otro lado, sus gastos fijos mensuales ascienden a 425 euros. ¿Cuántas tiendas debería incorporar al mes para obtener una ganancia máxima?

B. [1,75 PUNTOS] La gráfica de la función $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+5}{2x-7}$ tiene como asíntota la recta $y = 2x - 3$. Determinar los valores de los parámetros a y b.

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]

El peso de las manzanas que un agricultor cosecha sigue una distribución normal con desviación típica de 25 gramos. Una muestra aleatoria de 150 manzanas da como resultado un peso medio de 227 gramos.

A. [1,5 PUNTOS] Obtener el intervalo de confianza del 92 % para el peso medio.

B. [1,5 PUNTOS] Determinar el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 98 % sea un tercio del obtenido en el apartado anterior.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS] Considérese una pequeña empresa dedicada a la fabricación de mobiliario. En concreto, produce dos modelos de armario: A y B. Se dispone de 12 carpinteros para ensamblar los muebles, cada uno de ellos con una jornada laboral de 8 horas diarias.

El tiempo de ensamblado de cada tipo de mueble y los beneficios obtenidos por la venta de cada unidad se muestran en la tabla adjunta:

	Tiempo de ensamblado	Beneficios
Una unidad del modelo A	3 horas	70 euros
Una unidad del modelo B	6 horas	160 euros

La producción diaria total debe ser de 15 unidades como mínimo, con la condición de que el número de unidades del modelo B debe ser como máximo la mitad del número de muebles del modelo A.
Si la empresa vende todo lo que fabrica, ¿cuántos armarios de cada modelo deben producirse al día para obtener los máximos beneficios diarios?

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

A1. [1,75 PUNTOS] Dada la función $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2+ax+b}$, determinar los valores de a y b sabiendo que su gráfica posee un extremo relativo en el punto $\left(-3,\dfrac{9}{4}\right)$.

A2. [1 PUNTO] Para $a = -2$ y $b = -3$ determinar las asíntotas verticales de la función resultante $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2-2x-3}$. Esbozar la posición de la gráfica respecto a dichas asíntotas, calculando previamente los límites laterales correspondientes.

B. [0,75 PUNTOS] Sea ahora la función $f(x)=\dfrac{3x^2-3x-6}{x^2-2x-3}$. ¿En qué puntos es discontinua? ¿Se puede definir de nuevo esta función para evitar alguna discontinuidad?

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]
Este último curso 2016/2017, el 45 % de los alumnos de nuevo ingreso en el Grado de Economía es de Santander, el 40 % proviene de otras localidades de Cantabria y el 15 % restante viene de fuera de la región. De los alumnos de nuevo ingreso procedentes de Santander, superaron la Selectividad en junio de 2016 el 70 %; de los procedentes de otras localidades de Cantabria, el 75 %, y de los provenientes de fuera de Cantabria, el 73 %. Si elegimos un alumno de nuevo ingreso al azar,

A. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que sea de Santander y haya superado la Selectividad en junio de 2016?
B. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que haya superado la Selectividad en junio de 2016?
C. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que sea de Cantabria pero de fuera de la capital, sabiendo que no superó la Selectividad en junio de 2016?

SOLUCIONES

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]

A. [3 PUNTOS] Resolver la ecuación matricial $(A+X)B = C$ con

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\quad y\quad C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 4 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

B. [0,5 PUNTOS] Dada la matriz $M=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$ con determinante $|M|=8$, calcular:

B1. [0,25 PUNTOS] $\begin{vmatrix}a & d & g\\ b & e & h\\ c & f & i\end{vmatrix}$

B2. [0,25 PUNTOS] $\begin{vmatrix}4a & -3b & c\\ 4d & -3e & f\\ 4g & -3h & i\end{vmatrix}$

A. $(A+X)B=C \Rightarrow AB+XB=C \Rightarrow XB=C-AB$

Si B es invertible podemos despejar X.

$$B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow |B|=\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}=3+6-2=7\neq 0$$

Por tanto, existe B^{-1}. Podemos despejar X en la ecuación matricial anterior.

$$XB=C-AB \Rightarrow XBB^{-1}=(C-AB)B^{-1} \Rightarrow X=(C-AB)B^{-1}$$

Calculamos la inversa de B.

$$B^{-1}=\frac{Adj\left(B^T\right)}{|B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}}{7}=\frac{\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}}{7}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1 & 6 & -4\\ -3 & 3 & -2\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

Sustituyendo en $X=(C-AB)B^{-1}$

$$X=\left(\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 4 & 1 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\right)\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1 & 6 & -4\\ -3 & 3 & -2\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

$$X=\left(\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 4 & 1 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & -3 & -1\\ 5 & -4 & 4\end{pmatrix}\right)\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1 & 6 & -4\\ -3 & 3 & -2\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

$$x=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1 & 4 & 4\\ -1 & 5 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 6 & -4\\ -3 & 3 & -2\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

$$X=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1-12+4 & 6+12-4 & -4-8+12\\ -1-15-5 & -6+15+5 & 4-10-15\end{pmatrix}$$

$$X=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-7 & 14 & 0\\ -21 & 14 & -21\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ -3 & 2 & -3\end{pmatrix}}$$

B.

B1. $|M|=\begin{vmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}=8 \Rightarrow \begin{vmatrix}a & d & g\\ b & e & h\\ c & f & i\end{vmatrix}=|M^T|=|M|=8$

B2. $\begin{vmatrix}4a & -3b & c\\ 4d & -3e & f\\ 4g & -3h & i\end{vmatrix}=4\cdot(-3)\begin{vmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}=-12|M|=-12\cdot 8=-96$

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

A. [1,75 PUNTOS] El representante de una firma de perfumes tiene un sueldo fijo mensual de 1500 euros. También recibe una comisión, $-0.05x^2+0.7x+30$, que depende del número de tiendas, *x*, que incluye al mes en su cartera de clientes. Por otro lado, sus gastos fijos mensuales ascienden a 425 euros. ¿Cuántas tiendas debería incorporar al mes para obtener una ganancia máxima?

B. [1,75 PUNTOS] La gráfica de la función $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+5}{2x-7}$ tiene como asíntota la recta $y = 2x - 3$. Determinar los valores de los parámetros *a* y *b*.

A. Obtengamos la función que expresa su ganancia mensual:

$$f(x)=1500+\left(-0.05x^2+0.7x+30\right)-425$$

$$f(x)=-0.05x^2+0.7x+1105$$

Calculamos su derivada y la igualamos a cero en busca de un extremo de la función.

$$f(x)=-0.05x^2+0.7x+1105 \Rightarrow f'(x)=-0.1x+0.7$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow -0.1x+0.7=0 \Rightarrow x=\frac{0.7}{0.1}=7$$

Con la derivada segunda averiguamos si es máximo o mínimo.

$$f'(x)=-0.1x+0.7 \Rightarrow f''(x)=-0.1$$

$$f''(7)=-0.1<0$$

La función presenta un máximo en x = 7. Debe de incluir 7 tiendas al mes como clientes para maximizar sus ingresos.

B. Una asíntota oblicua tiene como ecuación $y=mx+n$, obteniéndose los valore m y n con los límites siguientes.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax^2+bx+5}{2x-7}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+5}{2x^2-7x}=\lim_{x\to\infty}\frac{a\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}}=\frac{a}{2}$$

Como la asíntota es $y = 2x - 3$, entonces debe ser $\frac{a}{2}=2 \Rightarrow a=4$

Como $m=2$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+bx+5}{2x-7}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\cancel{4x^2}+bx+5-\cancel{4x^2}+14x}{2x-7}\right)$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\frac{(b+14)x+5}{2x-7}=\lim_{x\to\infty}\frac{(b+14)\cancel{x}}{2\cancel{x}}=\frac{b+14}{2}$$

Así $\frac{b+14}{2}=-3 \Rightarrow b+14=-6 \Rightarrow b=-20$

Los valores buscados son a = 4 y b = –20.

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]
El peso de las manzanas que un agricultor cosecha sigue una distribución normal con desviación típica de 25 gramos. Una muestra aleatoria de 150 manzanas da como resultado un peso medio de 227 gramos.
A. [1,5 PUNTOS] Obtener el intervalo de confianza del 92 % para el peso medio.
B. [1,5 PUNTOS] Determinar el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 98 % sea un tercio del obtenido en el apartado anterior.

Llamemos X = Peso de las manzanas de un agricultor. X = N(μ, 25)

A. $\bar{x} = 227\ g; \quad n = 150$

Con el nivel de confianza del 92% significa que
1 – ∝ = 0,92 → ∝ = 0,08 →∝/2 = 0'04 →1 – ∝/2 = 0,96 → $z_{\alpha/2}$ **= 1,75**

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(227 - 1,75 \cdot \frac{25}{\sqrt{150}},\ 227 + 1,75 \cdot \frac{25}{\sqrt{150}}\right)$$

El intervalo de confianza es $(223'428,\ 230'572)$

B. Para un nivel de confianza del 98% averiguamos $z_{\alpha/2}$.

1 – ∝ = 0,98 → ∝ = 0,02 →∝/2 = 0'01 →1 – ∝/2 = 0,99 → $z_{\alpha/2}$ **= 2,325**

Como el error anterior era de $1,75 \cdot \frac{25}{\sqrt{150}} = 3,57$. Ahora debe de ser la tercera parte y esto es 1,19 entonces:

$$z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,19 \Rightarrow 2,325 \cdot \frac{25}{\sqrt{n}} = 1,19 \Rightarrow 2,325 \cdot \frac{25}{1,19} = \sqrt{n} \Rightarrow n = \left(2,325 \cdot \frac{25}{1,19}\right)^2 = 2385,79$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 2386 manzanas.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS] Considérese una pequeña empresa dedicada a la fabricación de mobiliario. En concreto, produce dos modelos de armario: A y B. Se dispone de 12 carpinteros para ensamblar los muebles, cada uno de ellos con una jornada laboral de 8 horas diarias.
El tiempo de ensamblado de cada tipo de mueble y los beneficios obtenidos por la venta de cada unidad se muestran en la tabla adjunta:

	Tiempo de ensamblado	Beneficios
Una unidad del modelo A	3 horas	70 euros
Una unidad del modelo B	6 horas	160 euros

La producción diaria total debe ser de 15 unidades como mínimo, con la condición de que el número de unidades del modelo B debe ser como máximo la mitad del número de muebles del modelo A.
Si la empresa vende todo lo que fabrica, ¿cuántos armarios de cada modelo deben producirse al día para obtener los máximos beneficios diarios?

Llamando x a los armarios del tipo A producidos cada día e y a los armarios del tipo B.

	Tiempo de ensamblado	Beneficios
Armarios del modelo A (x)	3x	70x
Armarios del modelo B (y)	6y	160y
TOTAL	3x + 6y	70x + 160y

La función que deseamos maximizar es el beneficio $f(x,y)=70x+160y$.

Expresemos las restricciones del problema en inecuaciones.

En total se disponen de un máximo de 12 · 8 = 96 horas diarias de trabajo → *3x + 6y ≤ 96.*
La producción diaria total debe ser de 15 unidades como mínimo → *x + y ≥ 15*
El número de unidades del modelo B (y) debe ser como máximo la mitad del número de muebles del modelo A (x) → $y \le \frac{x}{2}$

Reuniendo todas las restricciones son:
$$\left.\begin{array}{l} x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ x+y\ge 15 \\ y\le \frac{x}{2} \\ 3x+6y\le 96 \Rightarrow x+2y\le 32 \end{array}\right\}$$

Dibujemos la región del plano que cumple todas estas restricciones. Para ello dibujamos las rectas asociadas.

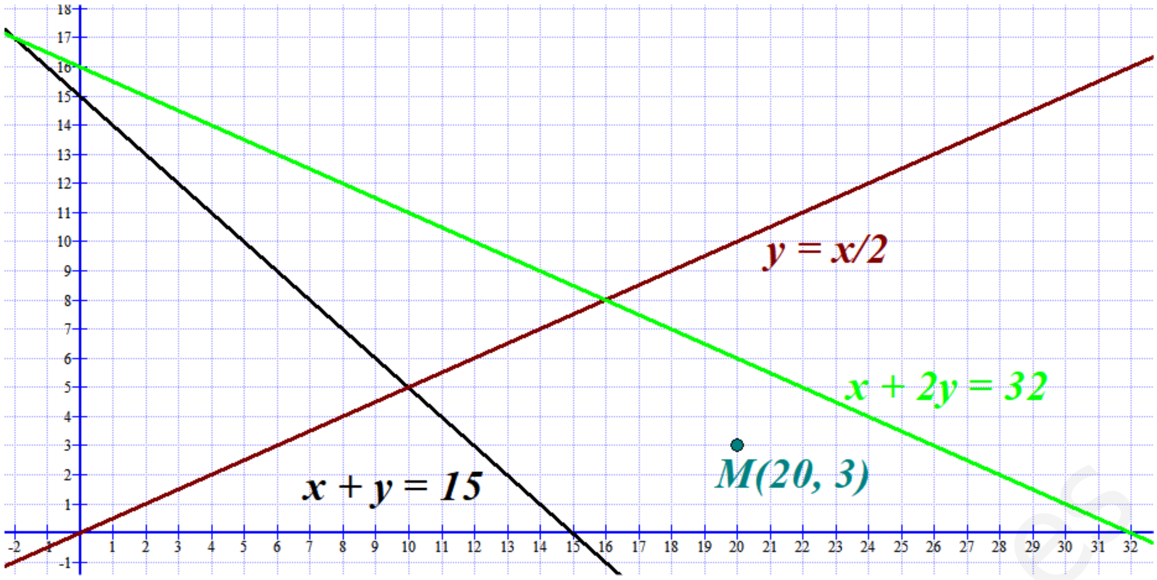
$x+y=15 \Rightarrow y=15-x$

x	$y=15-x$
0	15
10	5

x	$y=\frac{x}{2}$
0	0
2	1
10	5

$x+2y=32 \Rightarrow y=\frac{32-x}{2}$

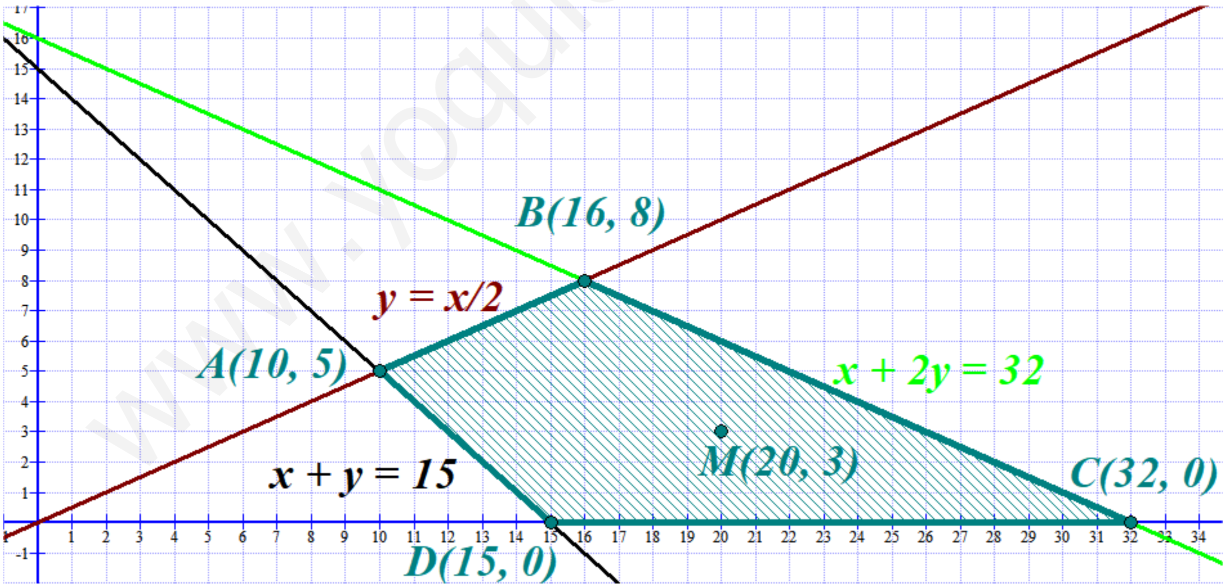
x	$y=\frac{32-x}{2}$
0	16
12	10



Probamos si el punto M(20, 3) cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 20 \geq 0 \\ 3 \geq 0 \\ 20+3 \geq 15 \\ 3 \leq \dfrac{20}{2} \\ 20+6 \leq 32 \end{array}\right\} \text{ Si se cumplen todas las restricciones.}$$

La región factible es la delimitada por las tres rectas y el eje OX que contiene al punto M(20, 3).



Valoramos los vértices en la función que deseamos maximizar $f(x, y) = 70x + 160y$.

A(10, 5) → $f(10,5) = 700 + 800 = 1500$

B(16, 8) → $f(16,8) = 1120 + 1280 = 2400$

C(32, 0) → $f(32,0) = 2240 + 0 = 2240$

D(15, 0) → $f(15,0) = 1050 + 0 = 1050$

El máximo se alcanza en el punto B(16, 8). Es decir, los máximos beneficios diarios se obtienen fabricando 16 armarios del modelo A y 8 del modelo B, siendo ese beneficio máximo de 2400 €.

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

A1. [1,75 PUNTOS] Dada la función $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2+ax+b}$, determinar los valores de a y b sabiendo que su gráfica posee un extremo relativo en el punto $\left(-3,\dfrac{9}{4}\right)$.

A2. [1 PUNTO] Para a = –2 y b = –3 determinar las asíntotas verticales de la función resultante $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2-2x-3}$. Esbozar la posición de la gráfica respecto a dichas asíntotas, calculando previamente los límites laterales correspondientes.

B. [0,75 PUNTOS] Sea ahora la función $f(x)=\dfrac{3x^2-3x-6}{x^2-2x-3}$. ¿En qué puntos es discontinua? ¿Se puede definir de nuevo esta función para evitar alguna discontinuidad?

A1. La función $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2+ax+b}$ pasa por $\left(-3,\dfrac{9}{4}\right)$, entonces

$$f(-3)=\frac{9}{4}\Rightarrow\frac{3(-3)^2}{(-3)^2+a(-3)+b}=\frac{9}{4}\Rightarrow\frac{27}{9-3a+b}=\frac{9}{4}\Rightarrow 108=81-27a+9b\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 27=-27a+9b\Rightarrow\boxed{3=-3a+b}$$

Además, como en x = –3 hay un extremo la derivada debe anularse.

$$f(x)=\frac{3x^2}{x^2+ax+b}\Rightarrow f'(x)=\frac{6x\left(x^2+ax+b\right)-\left(2x+a\right)3x^2}{\left(x^2+ax+b\right)^2}=\frac{\cancel{6x^3}+6ax^2+6bx-\cancel{6x^3}-3ax^2}{\left(x^2+ax+b\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{3ax^2+6bx}{\left(x^2+ax+b\right)^2}$$

$$f'(-3)=0\Rightarrow\frac{3a(-3)^2+6b(-3)}{\left((-3)^2+a(-3)+b\right)^2}=0\Rightarrow 27a-18b=0\Rightarrow\boxed{3a-2b=0}$$

Si juntamos las dos condiciones obtenemos un sistema:

$$\left.\begin{array}{l}3a-2b=0\\-3a+b=3\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Sumamos las dos ecuaciones}\\-b=3\Rightarrow\boxed{b=-3}\end{array}\right\}\Rightarrow 3a+6=0\Rightarrow\boxed{a=\frac{-6}{3}=-2}$$

Los valores buscados son a = –2 y b = –3.

A2. Para a = –2 y b = –3 la función resultante es $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2-2x-3}$. Sus asíntotas verticales son $x=a$, siendo ***a*** el valor que anula el denominador de la función.

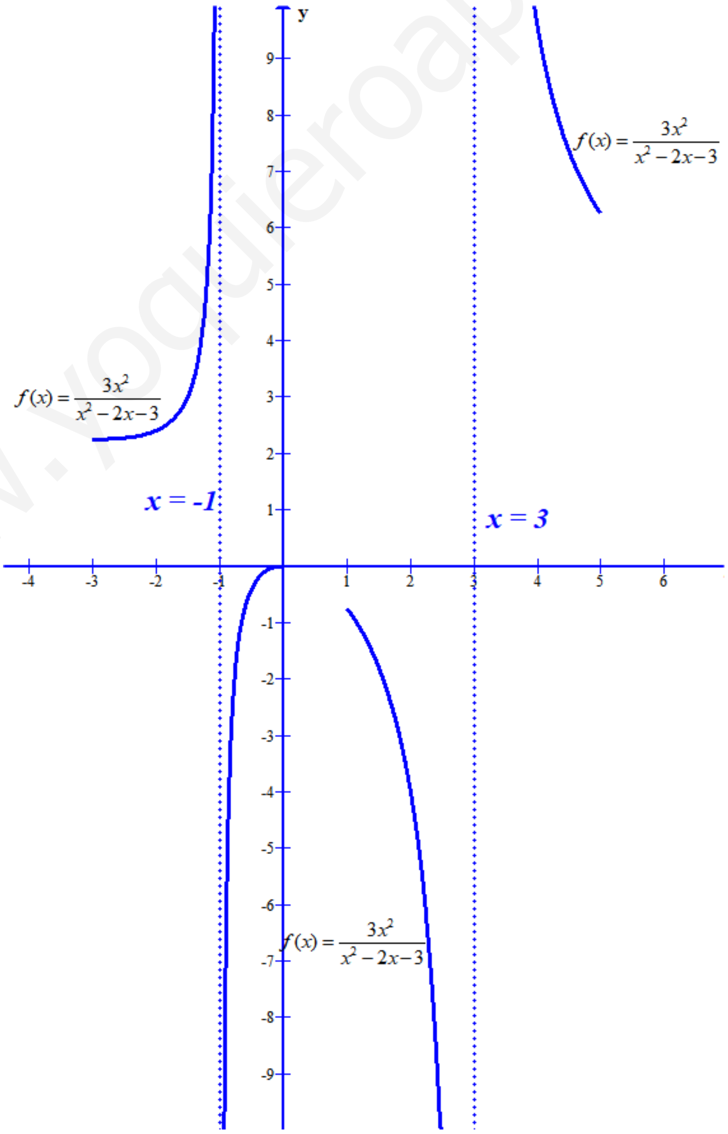
$$x^2-2x-3=0\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}=\begin{cases}=\dfrac{2+4}{2}=3\\[2mm]=\dfrac{2-4}{2}=-1\end{cases}$$

Las asíntotas verticales son $x=3$ y $x=-1$.
Estudiemos la posición relativa de asíntotas y función, para ello estudiamos el valor de los límites laterales.

$$\text{En x = 3 los límites son } \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{3x^2}{x^2-2x-3} = \dfrac{27}{0} = \left\{ \begin{array}{l} \text{si tomo x =2,9} \\ \dfrac{3\cdot 2,9^2}{2,9^2-2\cdot 2,9-3} = \dfrac{+}{-0,39} < 0 \end{array} \right\} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{3x^2}{x^2-2x-3} = \dfrac{27}{0} = \left\{ \begin{array}{l} \text{si tomo x =3,1} \\ \dfrac{3\cdot 3,1^2}{3,1^2-2\cdot 3,1-3} = \dfrac{+}{0,41} > 0 \end{array} \right\} = +\infty \end{cases}$$

$$\text{En x = –1 los límites son } \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{3x^2}{x^2-2x-3} = \dfrac{3}{0} = \left\{ \begin{array}{l} \text{si tomo } x = -1,1 \\ \dfrac{3(-1,1)^2}{(-1,1)^2-2(-1,1)-3} = \dfrac{+}{0,41} > 0 \end{array} \right\} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{3x^2}{x^2-2x-3} = \dfrac{3}{0} = \left\{ \begin{array}{l} \text{si tomo } x = -0,9 \\ \dfrac{3(-0,9)^2}{(-0,9)^2-2(-0,9)-3} = \dfrac{+}{-0,39} < 0 \end{array} \right\} = -\infty \end{cases}$$

La gráfica de la función es:



B. La discontinuidad de una función racional aparece en los valores que anulan el denominador.

Si la función es $f(x)=\dfrac{3x^2-3x-6}{x^2-2x-3}$, averigüemos cuando el denominador se anula y el tipo de discontinuidad que aparece.

$$x^2-2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}=\begin{cases}=\dfrac{2+4}{2}=3\\[2mm] =\dfrac{2-4}{2}=-1\end{cases}$$

Calculemos los límites en esos valores.

En x = –1.

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{3x^2-3x-6}{x^2-2x-3}=\frac{3+3-6}{0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación}=$$

factorizamos denominador y numerador.

Denominador $\rightarrow x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$

Numerador $\rightarrow 3x^2-3x-6=0 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\dfrac{1\pm 3}{2}=\begin{cases}=\dfrac{1+3}{2}=2\\[2mm] =\dfrac{1-3}{2}=-1\end{cases}$

$3x^2-3x-6=3(x-2)(x+1)$

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{3(x-2)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x-3)}=\lim_{x\to -1}\frac{3(x-2)}{(x-3)}=\frac{-9}{-4}=\frac{9}{4}$$

En x = –1 hay una discontinuidad evitable redefiniendo la función y dando a x = –1 la imagen $f(-1)=\dfrac{9}{4}$ se evitaría la discontinuidad.

En x = 3.

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-3x-6}{x^2-2x-3}=\frac{27-9-6}{0}=\frac{12}{0}=\infty$$

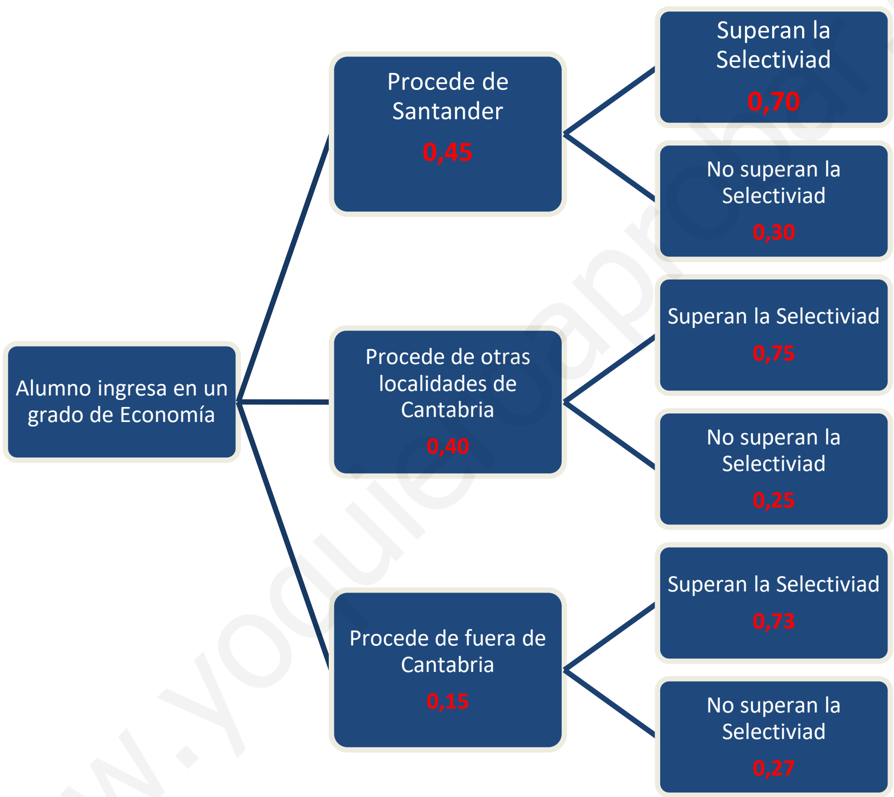
Esta discontinuidad es inevitable.

La nueva función que evita la discontinuidad en x = –1, aunque sigue siendo discontinua en $x=3$ sería $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2-3x-6}{x^2-2x-3} & si \quad x\neq -1 \; y \; x\neq 3\\[2mm] \dfrac{9}{4} & si \quad x=-1\end{cases}$

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]
Este último curso 2016/2017, el 45 % de los alumnos de nuevo ingreso en el Grado de Economía es de Santander, el 40 % proviene de otras localidades de Cantabria y el 15 % restante viene de fuera de la región. De los alumnos de nuevo ingreso procedentes de Santander, superaron la Selectividad en junio de 2016 el 70 %; de los procedentes de otras localidades de Cantabria, el 75 %, y de los provenientes de fuera de Cantabria, el 73 %. Si elegimos un alumno de nuevo ingreso al azar,

A. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que sea de Santander y haya superado la Selectividad en junio de 2016?
B. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que haya superado la Selectividad en junio de 2016?
C. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que sea de Cantabria pero de fuera de la capital, sabiendo que no superó la Selectividad en junio de 2016?

Realicemos un diagrama de árbol para ayudarnos a entender la situación planteada en el problema.



Apoyándonos en este diagrama respondemos a las preguntas planteadas.

A. $P(\text{Sea de Santander y Supere Selectividad}) = 0,45 \cdot 0,70 = \boxed{0,315}$

B.

$$P(\text{Supere la selectividad}) =$$
$$= P(\text{Sea de Santander})P(\text{Supere la selectividad / Sea de Santander}) +$$
$$+P(\text{Sea de otra localidad de Cantabria})P(\text{Supere la selectividad / Sea de otra localidad de Cantabria}) +$$
$$+P(\text{Sea de fuera de Cantabria})P(\text{Supere la selectividad / Sea de fuera de Cantabria}) =$$
$$= 0,45 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,75 + 0,15 \cdot 0,73 = \boxed{0,7245}$$

C.

$$P\left(\text{Sea de Cantabria pero de fuera de la capital / No superó la Selectividad}\right)=$$

$$=\frac{P\left(\text{Sea de Cantabria pero de fuera de la capital y No superó la Selectividad}\right)}{P\left(\text{No superó la Selectividad}\right)}=$$

$$=\frac{P\left(\text{Sea de Cantabria pero no de la capital}\right)P\left(\text{No superó la Selectividad / Es de Cantabria pero no de la capital }\right)}{1-P\left(\text{Superó la Selectividad}\right)}=$$

$$=\frac{0,4\cdot 0,25}{1-0,7245}=\frac{0,1}{0,2755}=\boxed{0,363}$$