UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – JUNIO 2019

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INDICACIONES

Elija una de las dos opciones.

No se admitirá ningún resultado si no está debidamente razonado.

No se permiten calculadoras gráficas, ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1 [3,5 puntos]

A. [3 puntos] Una empresa que fabrica grapadoras debe satisfacer un pedido de 325 unidades que empaqueta en cajas de diferentes tamaños. Hay tres modelos de cajas, A, B y C, en los que caben, respectivamente, 5, 10 y 15 unidades. Se dispone de un total de 35 cajas. Además, el total de cajas de los modelos A y B es seis veces el número de cajas del modelo C.

A1. [1 punto] Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular el número de cajas de cada modelo que se pueden utilizar para enviar el pedido.

A2. [1 punto] Analizar la compatibilidad de dicho sistema.

A3. [0,5 puntos] Resolverlo.

A4. [0,5 puntos] ¿A cuánto ha ascendido la factura de compra de las cajas, sabiendo que una unidad del modelo A cuesta 4,5 euros; una del modelo B, 8 euros; y una del C, 12 euros?

B. [0,5 puntos] Despejar la incógnita X de la siguiente ecuación matricial: B X B = B (X+A)

Ejercicio 2 [3,5 puntos] Dada la función: $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$

A. [0,2 puntos] Su dominio y los puntos de corte con los ejes OX y OY.

B. [0,6 puntos] Las asíntotas.

C. [1,1 puntos] Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

D. [1,1 puntos] Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.

E. [0,5 puntos] Finalmente, con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar su gráfica.

Ejercicio 3 [3 puntos]

De los 360 alumnos de nuevo ingreso de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, conocemos el número de matriculados en el Centro de Idiomas de la Universidad. Los datos completos aparecen en la siguiente tabla:

	Matriculados en C. de Idiomas	No matriculados en C. de Idiomas	Total
G. Económicas	57	63	120
G. Adm. y D. Empresas	106	134	240
Total	163	197	360

Elegido un alumno al azar,

A. [1 punto] ¿Calcular la probabilidad de que no esté matriculado en el Centro de Idiomas?

B. [1 punto] Si sabemos que el alumno pertenece al Grado en Económicas, ¿cuál es la probabilidad de que esté inscrito en el Centro de Idiomas?

C. [1 punto] Calcular la probabilidad de que sea del Grado en Administración y D. de Empresas y no esté inscrito en el Centro de Idiomas.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1 [3,5 puntos]

A. [3 puntos] Dado el siguiente sistema: $\begin{cases} -x+4y=6 \\ 2x+3y=\dfrac{5a}{2} \\ 5x+2y=a^2 \end{cases}$

A1. [2,5 puntos] Determinar, según los valores del parámetro ***a***, los casos en los que tiene o no tiene solución y si esta es única o no.
A2. [0,5 puntos] Resolver los casos compatibles.
B. [0,5 puntos] A, B y C son tres matrices cuadradas de dimensión 3. Sus determinantes son:
$|A|=3, |B|=-2$ y $|C|=6$.
Calcular:
B1. [0,2 puntos] $|A^t B^{-1}|$
B2. [0,1 puntos] $|D|$ siendo *D* la matriz resultante de multiplicar por 2 los elementos de la segunda columna de *C*.
B3. [0,2 puntos] $|B^2 E|$ siendo E la matriz resultante de intercambiar la primera y segunda filas de A.

Ejercicio 2 [3,5 puntos]
A. [1,75 puntos]
Una empresa juguetera puede vender *x* unidades al mes de un determinado modelo de tren eléctrico, al precio de $518-x^2$ euros por unidad. Por otra parte, el fabricante tiene gastos mensuales: unos fijos de 225 euros y otros de 275*x* euros que dependen del número *x* de unidades.
Hallar el número de unidades que maximizan el beneficio mensual. ¿A cuánto ascienden los ingresos?

B. [1,75 puntos] Dada la función $f(x)=-2x^3-4x^2+6x$

B1. [0,1 puntos] Los puntos de corte con los ejes OX y OY.
B2. [0,4 puntos] Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.
B3. [0,4 puntos] Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.
B4. [0,25 puntos] Con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar su gráfica.
B5. [0,6 puntos] Calcular el área de la región delimitada por la curva y el eje OX.

Ejercicio 3 [3 puntos]
El gasto mensual en alquiler de los inquilinos de la zona centro de determinada ciudad, sigue una distribución normal con desviación típica 73 euros. Una muestra aleatoria de 350 inquilinos da como resultado una renta media de 689,3 euros.

A. [1,5 puntos] Obtener el intervalo de confianza del 93% para la renta media.
B. [1,5 puntos] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 91% sea un tercio del obtenido en el apartado anterior?

SOLUCIONES

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1 [3,5 puntos]
A. [3 puntos] Una empresa que fabrica grapadoras debe satisfacer un pedido de 325 unidades que empaqueta en cajas de diferentes tamaños. Hay tres modelos de cajas, A, B y C, en los que caben, respectivamente, 5, 10 y 15 unidades. Se dispone de un total de 35 cajas. Además, el total de cajas de los modelos A y B es seis veces el número de cajas del modelo C.
A1. [1 punto] Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular el número de cajas de cada modelo que se pueden utilizar para enviar el pedido.
A2. [1 punto] Analizar la compatibilidad de dicho sistema.
A3. [0,5 puntos] Resolverlo.
A4. [0,5 puntos] ¿A cuánto ha ascendido la factura de compra de las cajas, sabiendo que una unidad del modelo A cuesta 4,5 euros; una del modelo B, 8 euros; y una del C, 12 euros?

B. [0,5 puntos] Despejar la incógnita X de la siguiente ecuación matricial: B X B = B (X+A)

A1. Llamemos x = número de cajas del modelo A, y = número de cajas del modelo B, z = número de cajas del modelo C.

- Son 325 unidades metidos en "***x***" cajas del modelo A (caben 5 unidades por caja), "***y***" cajas del modelo B (caben 10 unidades por caja) y "**z**" unidades del modelo C (caben 15 unidades por caja) → $325 = 5x + 10y + 15z$
- Hay un total de 35 cajas → $x + y + z = 35$.
- El total de cajas de los modelos A y B ($x + y$) es seis veces el número de cajas del modelo C (z) → $x + y = 6z$

Ponemos juntas estas condiciones y tenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 325 = 5x + 10y + 15z \\ x + y + z = 35 \\ x + y = 6z \end{array}\right\}$$

A2. Utilicemos Gauss para discutir el sistema que simplificado y ordenado queda:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 65 \\ x + y + z = 35 \\ x + y - 6z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª - Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{cccc} x & +y & +z & = 35 \\ -x & -2y & -3z & = -65 \\ \hline & -y & -2z & = -30 \end{array} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª - Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{cccc} x & +y & -6z & = 0 \\ -x & -2y & -3z & = -65 \\ \hline & -y & -9z & = -65 \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 65 \\ -y - 2z = -30 \\ -y - 9z = -65 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 65 \\ -y - 2z = -30 \\ y + 9z = 65 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª + Ecuación 2ª} \\ \begin{array}{ccc} y & +9z & = 65 \\ -y & -2z & = -30 \\ \hline & 7z & = 35 \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 65 \\ -y - 2z = -30 \\ 7z = 35 \end{array}\right\} \Rightarrow \{Simplificamos\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 65 \\ y + 2z = 30 \\ z = 5 \end{array}\right\}$$

Este sistema es compatible determinado, tiene una única solución.

A3. Sigamos con la resolución.

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+3z=65 \\ y+2z=30 \\ \boxed{z=5} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y+15=65 \\ y+10=30 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=50 \\ \boxed{y=20} \end{array}\right\} \Rightarrow x+40=50 \Rightarrow \boxed{x=10}$$

La solución es $x=10, \quad y=20, \quad z=5$

A4. Con los datos proporcionados la factura será de:

$$\left.\begin{array}{l} x=10 \text{ cajas del modelo A a } 4{,}5€ \\ y=20 \text{ cajas del modelo B a } 8€ \\ z=5 \text{ cajas del modelo C a } 12€ \end{array}\right\} \Rightarrow 10\cdot 4{,}5+20\cdot 8+5\cdot 12=45+160+60=\boxed{265€}$$

B. Si suponemos B una matriz invertible, siendo B^{-1} su matriz inversa, se despejaría:

$$B\,X\;B=B(X+A)\Rightarrow B^{-1}B\,X\;B=B^{-1}B(X+A)\Rightarrow X\;B=X+A$$

$$X\;B-X=A\Rightarrow X(B-I)=A\Rightarrow \boxed{X=A(B-I)^{-1}}$$

Hemos supuesto también que la matriz $(B-I)$ es invertible.

Ejercicio 2 [3,5 puntos] Dada la función: $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$

A. [0,2 puntos] Su dominio y los puntos de corte con los ejes OX y OY.
B. [0,6 puntos] Las asíntotas.
C. [1,1 puntos] Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.
D. [1,1 puntos] Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.
E. [0,5 puntos] Finalmente, con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar su gráfica.

A. La función $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$ tiene como dominio $\mathbb{R}-\{-2,2\}$, ya que estos valores excluidos anulan el denominador y por tanto no tienen imagen.

$$f(-2)=\frac{4+1}{4-4}=\frac{5}{0}=\text{No existe} \qquad f(2)=\frac{4+1}{4-4}=\frac{5}{0}=\text{No existe}$$

Los puntos de corte con el eje OY:

$$x=0 \Rightarrow f(0)=\frac{0+1}{0-4}=-\frac{1}{4}=-0,25 \text{ El punto de corte es P(0, –0´25)}$$

Los puntos de corte con el eje OX:

$$y=0 \Rightarrow 0=\frac{x^2+1}{x^2-4} \Rightarrow x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x=\sqrt{-1}=\text{No existe}$$

No hay puntos de corte con el eje de abscisas.

B. Asíntotas verticales. $x=2;\quad x=-2$. Al ser estos los valores excluidos del dominio.

Asíntotas horizontales. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

La asíntota horizontal es $y=1$

Asíntota oblicua. Al tener asíntota horizontal no tiene oblicua.

C. Para estudiar el crecimiento o decrecimiento necesitamos la derivada.

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-4} \Rightarrow f\,'(x)=\frac{2x\left(x^2-4\right)-2x\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{\cancel{2x^3}-8x-\cancel{2x^3}-2x}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{-10x}{\left(x^2-4\right)^2}$$

Igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f\,'(x)=0 \Rightarrow \frac{-10x}{\left(x^2-4\right)^2}=0 \Rightarrow -10x=0 \Rightarrow x=0$$

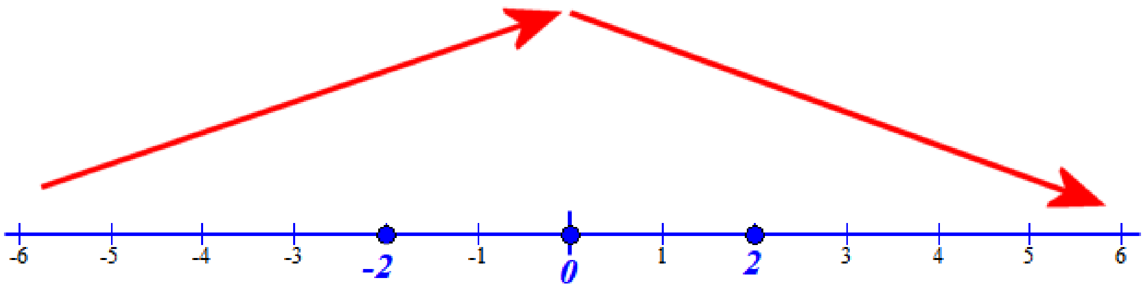
Estudiamos el signo de la derivada antes y después de 0.

En $(-\infty,-2)$ tomo x = –3 y la derivada vale $f\,'(-3)=\dfrac{30}{(9-4)^2}>0$ la función crece.

En $(-2,0)$ tomo x = –1 y la derivada vale $f\,'(-1)=\dfrac{20}{(1-4)^2}>0$ la función crece.

En $(0,2)$ tomo x = 1 y la derivada vale $f\,'(1)=\dfrac{-10}{(1-4)^2}<0$ la función decrece.

En $\left(2,+\infty\right)$ tomo x = 3 y la derivada vale $f\,'(3)=\dfrac{-30}{\left(9-4\right)^2}<0$ la función decrece.



La función crece en $\left(-\infty,-2\right)\cup\left(-2,0\right)$ y decrece en $\left(0,2\right)\cup\left(2,+\infty\right)$.
Tiene un máximo relativo en *x = 0.*

D. Para estudiar la concavidad o convexidad necesitamos la segunda derivada.

$$f\,'(x)=\frac{-10x}{\left(x^2-4\right)^2}\Rightarrow f\,''(x)=\frac{-10\left(x^2-4\right)^2-\left(-10x\right)2\left(x^2-4\right)2x}{\left(x^2-4\right)^4}=\frac{-10\left(x^2-4\right)^2+40x^2\left(x^2-4\right)}{\left(x^2-4\right)^4}$$

$$f\,''(x)=\frac{-10\cancel{\left(x^2-4\right)}\left[\left(x^2-4\right)-4x^2\right]}{\left(x^2-4\right)^{\cancel{4}\to 3}}=\frac{-10\left(-3x^2-4\right)}{\left(x^2-4\right)^3}$$

Si igualamos a cero.

$$f\,''(x)=0\Rightarrow\frac{-10\left(-3x^2-4\right)}{\left(x^2-4\right)^3}=0\Rightarrow-10\left(-3x^2-4\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-3x^2-4=0\Rightarrow-3x^2=4\Rightarrow x^2=\frac{4}{-3}\Rightarrow x=\sqrt{\frac{-4}{3}}=\text{No existe}$$

No hay puntos de inflexión.

Veamos el signo de la derivada segunda antes de –2, entre –2 y 2, por último después de 2.

En $\left(-\infty,-2\right)$ tomamos x = –3 la derivada segunda vale $f\,''(-3)=\dfrac{-10\left(-27-4\right)}{\left(9-4\right)^3}=\dfrac{310}{125}>0$ y la función es convexa ($\bigcup$).

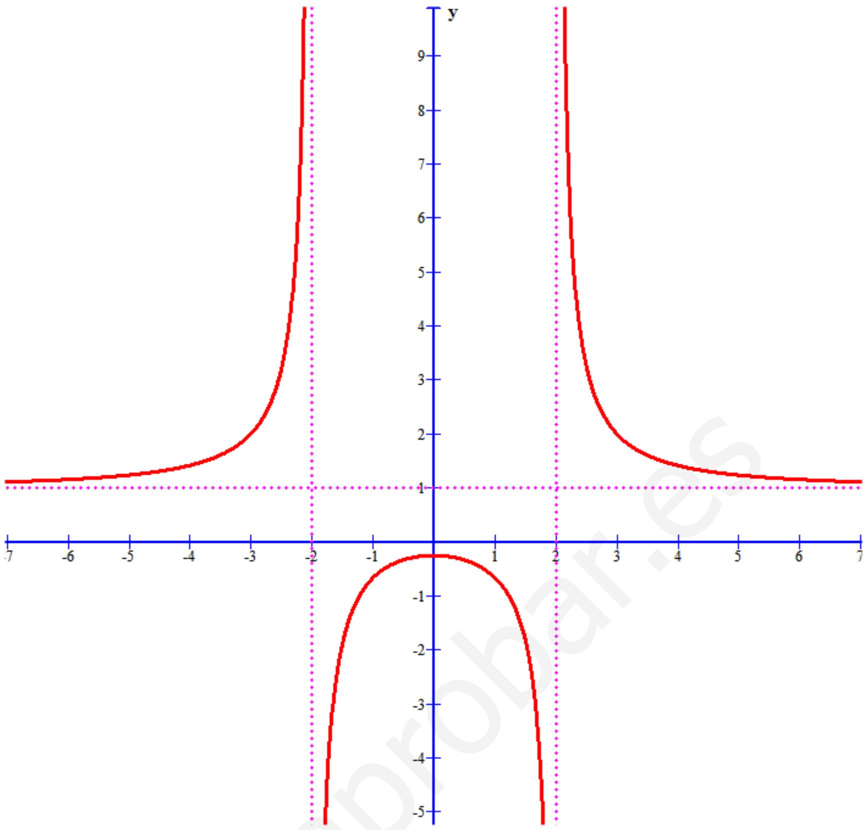
En $\left(-2,2\right)$ tomamos x = 0 la derivada segunda vale $f\,''(0)=\dfrac{-10\left(-4\right)}{\left(0-4\right)^3}=\dfrac{40}{-64}<0$ y la función es cóncava $\left(\bigcap\right)$.

En $\left(2,+\infty\right)$ tomamos x = 3 la derivada segunda vale $f\,''(3)=\dfrac{-10\left(-27-4\right)}{\left(9-4\right)^3}=\dfrac{310}{125}>0$ y la función es convexa ($\bigcup$).

La función es cóncava $\left(\bigcap\right)$ en $\left(-2,2\right)$ y convexa ($\bigcup$) en $\left(-\infty,-2\right)\cup\left(2,+\infty\right)$. No tiene puntos de inflexión.

E. Hacemos una tabla de valores y con los datos obtenidos podemos dibujar la gráfica.

x	$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$
-4	$\dfrac{17}{12}=1,41$
-3	$\dfrac{10}{5}=2$
-1	$\dfrac{2}{-3}=-0,66$
0	$\dfrac{-1}{4}=-0,25$
3	2
4	$1,41$



Ejercicio 3 [3 puntos]
De los 360 alumnos de nuevo ingreso de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, conocemos el número de matriculados en el Centro de Idiomas de la Universidad. Los datos completos aparecen en la siguiente tabla:

	Matriculados en C. de Idiomas	No matriculados en C. de Idiomas	Total
G. Económicas	57	63	120
G. Adm. y D. Empresas	106	134	240
Total	163	197	360

Elegido un alumno al azar,
A. [1 punto] ¿Calcular la probabilidad de que no esté matriculado en el Centro de Idiomas?
B. [1 punto] Si sabemos que el alumno pertenece al Grado en Económicas, ¿cuál es la probabilidad de que esté inscrito en el Centro de Idiomas?
C. [1 punto] Calcular la probabilidad de que sea del Grado en Administración y D. de Empresas y no esté inscrito en el Centro de Idiomas.

A. $P(\text{No esté matriculado en el C. de Idiomas})=\dfrac{197}{360}=\boxed{0,547}$

B. $P(\text{Esté en el C. de Idiomas / Está en el G. Económicas})=\dfrac{57}{120}=\boxed{0,475}$

C. $P(\text{Esté en G. Adm. y D. Empresas}\cap\text{No esté en C. de Idiomas})=\dfrac{134}{360}=\boxed{0,372}$

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1 [3,5 puntos]

A. [3 puntos] Dado el siguiente sistema: $\begin{cases} -x+4y=6 \\ 2x+3y=\dfrac{5a}{2} \\ 5x+2y=a^2 \end{cases}$

A1. [2,5 puntos] Determinar, según los valores del parámetro ***a***, los casos en los que tiene o no tiene solución y si esta es única o no.

A2. [0,5 puntos] Resolver los casos compatibles.

B. [0,5 puntos] A, B y C son tres matrices cuadradas de dimensión 3. Sus determinantes son: $|A|=3, |B|=-2 \ y \ |C|=6$.

Calcular:

B1. [0,2 puntos] $|A^t B^{-1}|$

B2. [0,1 puntos] $|D|$ siendo *D* la matriz resultante de multiplicar por 2 los elementos de la segunda columna de *C*.

B3. [0,2 puntos] $|B^2 E|$ siendo E la matriz resultante de intercambiar la primera y segunda filas de A.

A1. Discutamos el sistema en función del parámetro a.

Las matrices asociadas al sistema son:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A/B=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & \dfrac{5a}{2} \\ 5 & 2 & a^2 \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 ya que tiene un menor de orden 2 no nulo. $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3-8=-11 \neq 0$

El rango de A/B depende del valor de a.

$$|A/B| = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & \dfrac{5a}{2} \\ 5 & 2 & a^2 \end{vmatrix} = -3a^2+\frac{100a}{2}+24-90-8a^2+\frac{10a}{2} = -11a^2+55a-66$$

Si igualamos a cero.

$$|A/B|=0 \Rightarrow -11a^2+55a-66=0 \Rightarrow -a^2+5a-6=0 \Rightarrow$$

$$a=\frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{-2}=\frac{-5\pm1}{-2}=\begin{cases} =\dfrac{-5+1}{-2}=2 \\ =\dfrac{-5-1}{-2}=3 \end{cases}$$

Si $a \neq 2 \ y \ a \neq 3$ el rango de la matriz ampliada A/B es 3 distinto del rango de la matriz de coeficientes A. El sistema no tiene solución. Es un sistema incompatible.

Si $a=2$ o $a=3$ el rango de la matriz ampliada A/B es 2 al igual que el de la matriz de coeficientes A e igual que el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución.

A2. Resolvemos los dos casos de compatibilidad del sistema.

Si $a=2$ el sistema queda

$$\begin{cases}-x+4y=6\\ 2x+3y=5\\ 5x+2y=4\end{cases}\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación 2ª + 2 · Ecuación 1ª}\\ \begin{array}{rrl}2x & +3y & =5\\ -2x & +8y & =12\\ \hline & 11y & =17\end{array}\end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación 3ª + 5 · Ecuación 1ª}\\ \begin{array}{rrl}5x & +2y & =4\\ -5x & +20y & =30\\ \hline & 22y & =34\end{array}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-x+4y=6\\ 11y=17\\ 22y=34\end{cases}\Rightarrow\{\text{Ecuación 2ª = Ecuación 3ª}\}\Rightarrow\begin{cases}-x+4y=6\\ 11y=17\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x+4y=6\\ \boxed{y=\dfrac{17}{11}}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x+4\frac{17}{11}=6\Rightarrow\boxed{x=\frac{68}{11}-6=\frac{2}{11}}$$

Si $a=3$ el sistema queda

$$\begin{cases}-x+4y=6\\ 2x+3y=\dfrac{15}{2}\\ 5x+2y=9\end{cases}\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación 2ª + 2 · Ecuación 1ª}\\ \begin{array}{rrl}2x & +3y & =7{,}5\\ -2x & +8y & =12\\ \hline & 11y & =19{,}5\end{array}\end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación 3ª + 5 · Ecuación 1ª}\\ \begin{array}{rrl}5x & +2y & =9\\ -5x & +20y & =30\\ \hline & 22y & =39\end{array}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-x+4y=6\\ 11y=19{,}5\\ 22y=39\end{cases}\Rightarrow\{\text{Ecuación 2ª = Ecuación 3ª}\}\Rightarrow\begin{cases}-x+4y=6\\ 22y=39\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x+4y=6\\ \boxed{y=\dfrac{39}{22}}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x+4\frac{39}{22}=6\Rightarrow\boxed{x=\frac{156}{22}-6=\frac{24}{22}=\frac{12}{11}}$$

B1.

$$\left.\begin{array}{l}|D\cdot C|=|D|\cdot|C|\\ |A^t|=|A|\\ |B^{-1}|=\dfrac{1}{|B|}\end{array}\right\}\Rightarrow|A^tB^{-1}|=|A^t||B^{-1}|=|A|\frac{1}{|B|}=3\frac{1}{-2}=\boxed{-\frac{3}{2}}$$

B2. Al ser D la matriz resultante de multiplicar por 2 los elementos de la segunda columna de C se cumple que $|D|=2|C|$ → $|D|=2|C|=2\cdot 6=\boxed{12}$

B3. Al intercambiar dos filas el determinante cambia de signo → $|E|=-|A|$.

$$|B^2E|=|B^2||E|=|B|^2(-|A|)=(-2)^2(-3)=\boxed{-12}$$

Ejercicio 2 [3,5 puntos]
A. [1,75 puntos]
Una empresa juguetera puede vender x unidades al mes de un determinado modelo de tren eléctrico, al precio de $518-x^2$ euros por unidad. Por otra parte, el fabricante tiene gastos mensuales: unos fijos de 225 euros y otros de $275x$ euros que dependen del número x de unidades.
Hallar el número de unidades que maximizan el beneficio mensual. ¿A cuánto ascienden los ingresos?

B. [1,75 puntos] Dada la función $f(x)=-2x^3-4x^2+6x$
B1. [0,1 puntos] Los puntos de corte con los ejes OX y OY.
B2. [0,4 puntos] Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.
B3. [0,4 puntos] Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.
B4. [0,25 puntos] Con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar su gráfica.
B5. [0,6 puntos] Calcular el área de la región delimitada por la curva y el eje OX.

A. El beneficio mensual viene dado por la fórmula: Beneficios = Ingresos – Gastos.

$$B(x)=\left(518-x^2\right)x-\left(225+275x\right)=518x-x^3-225-275x$$

$$B(x)=-x^3+243x-225$$

Para buscar el máximo beneficio hacemos su derivada e igualamos a cero.

$$B(x)=-x^3+243x-225 \Rightarrow B'(x)=-3x^2+243$$

$$B'(x)=0 \Rightarrow -3x^2+243=0 \Rightarrow -3x^2=-243 \Rightarrow x^2=\frac{-243}{-3}=81 \Rightarrow x=\sqrt{81}=\pm 9$$

Como estamos en un caso de x unidades de tren, solo es válido el valor de $x = 9$.
Comprobemos si es un máximo.

$$B'(x)=-3x^2+243 \Rightarrow B''(x)=-6x$$

Sustituimos $x = 9$ → $B''(9)=-54<0$

La función presenta un máximo beneficio para el número de unidades $x = 9$

Con 9 unidades se maximiza el beneficio. Y este es un beneficio de $B(9)=-9^3+243\cdot 9-225=1233$ €, siendo los ingresos (sin descontar los gastos) de $Ingresos(9)=\left(518-9^2\right)9=3933$ €.

B1.

La función $f(x)=-2x^3-4x^2+6x$ corta al eje OY.

Si $x=0 \Rightarrow f(0)=0-0+0$. El punto de corte con el eje OY es P(0, 0).

La función $f(x)=-2x^3-4x^2+6x$ corta al eje OX.

$$y=0 \Rightarrow 0=-2x^3-4x^2+6x \Rightarrow 0=2x\left(-x^2-2x+3\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ -x^2-2x+3=0 \Rightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+12}}{-2}=\dfrac{2\pm 4}{-2}=\begin{cases} x=\dfrac{2+4}{-2}=-3 \\ x=\dfrac{2-4}{-2}=1 \end{cases} \end{cases}$$

Los puntos de corte con el eje OX son P(0, 0), Q(–3, 0) y R(1, 0).

B2. Estudiemos el signo de la derivada de $f(x) = -2x^3 - 4x^2 + 6x$

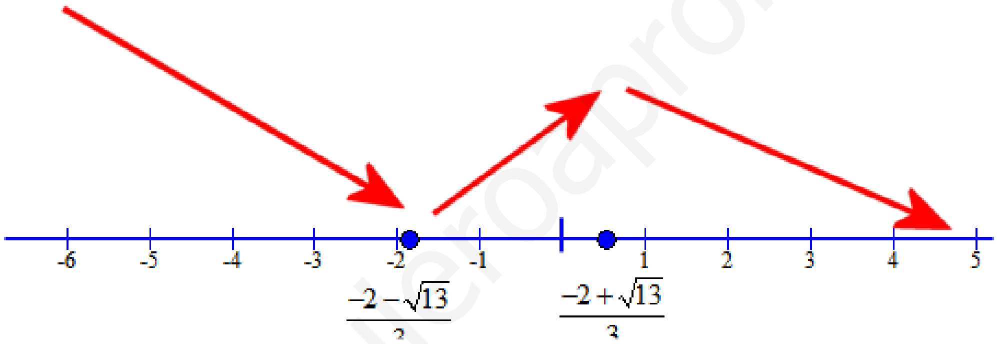
$$f(x) = -2x^3 - 4x^2 + 6x \Rightarrow f'(x) = -6x^2 - 8x + 6$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -6x^2 - 8x + 6 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 4x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+36}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{52}}{6} = \begin{cases} x = \dfrac{-4+\sqrt{52}}{6} = 0,53 \\ x = \dfrac{-4-\sqrt{52}}{6} = -1,86 \end{cases}$$

Veamos el signo de la derivada antes de –1,86, entre los dos valores y después de 0,53.

- En $(-\infty, -1.86)$ tomamos *x = –3* la derivada vale $f'(-3) = -6(-3)^2 - 8(-3) + 6 = -54 + 24 + 6 = -24 < 0$ y la función decrece.
- En $(-1.86, 0.53)$ tomamos *x = 0* la derivada vale $f'(0) = 6 > 0$ y la función crece.
- En $(0.53, +\infty)$ tomamos *x = 1* la derivada vale $f'(1) = -6 - 8 + 6 = -8 < 0$ y la función decrece.



La función tiene un mínimo en $x = -1.86$ y un máximo en $x = 0.53$.
La función crece en $(-1.86, 0.53)$ y decrece en $(-\infty, -1.86) \cup (0.53, +\infty)$.

B3. Estudiemos el signo de la derivada segunda de $f(x) = -2x^3 - 4x^2 + 6x$.

$$f'(x) = -6x^2 - 8x + 6 \Rightarrow f''(x) = -12x - 8$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -12x - 8 = 0 \Rightarrow -12x = 8 \Rightarrow x = -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3}$$

Veamos el signo de la derivada segunda antes de $-\frac{2}{3}$ y después de $-\frac{2}{3}$.

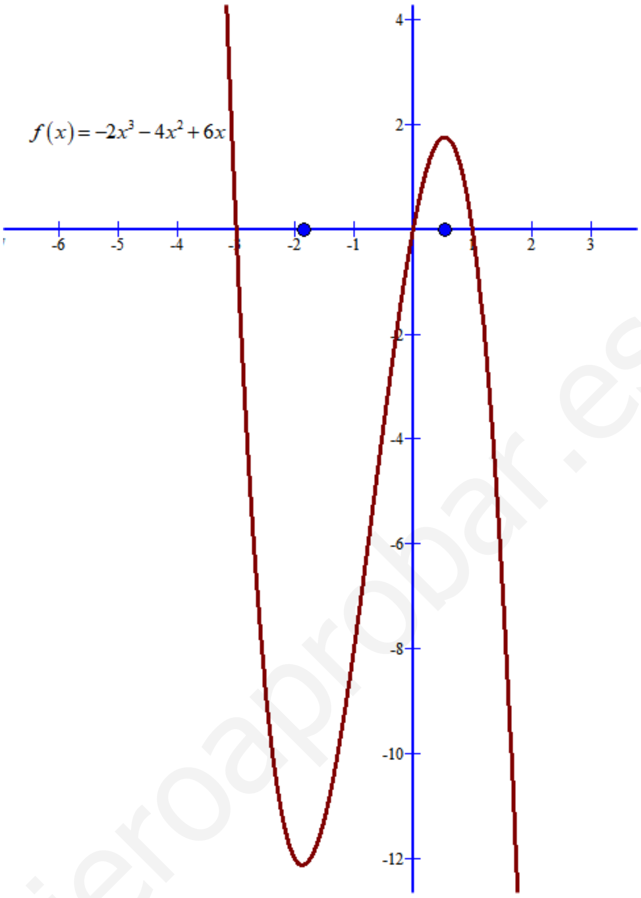
En $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$ tomamos *x = –1* y la derivada segunda vale $f''(-1) = 12 - 8 = 4 > 0$ y la función es convexa ($\bigcup$).

En $\left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$ tomamos *x = 0* y la derivada segunda vale $f''(0) = -8 < 0$ y la función es cóncava ($\bigcap$).

En $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$ es convexa ($\bigcup$) y en $\left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$ es cóncava ($\bigcap$). En $x = -\frac{2}{3}$ hay un punto de inflexión.

B4. Con una tabla de valores y los datos obtenidos la gráfica es:

x	$y=-2x^3-4x^2+6x$
-3	0
0	0
1	0
$0,53$	$1,75$
$-1,86$	$10,59$
2	-20



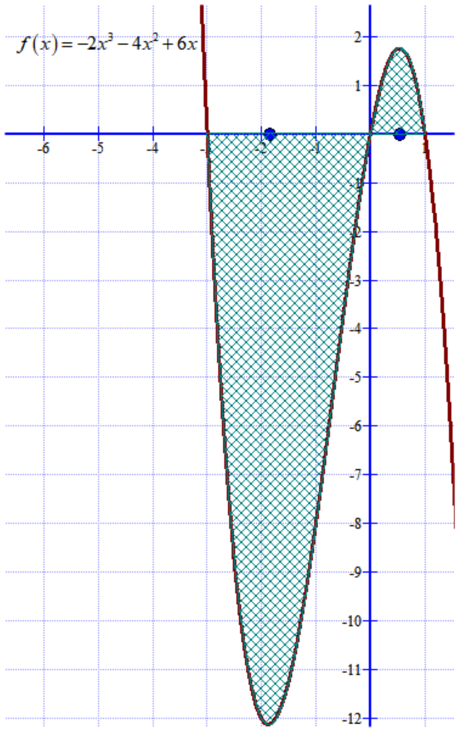
B5. El área de la región limitada por la gráfica y el eje de abscisas es la suma del valor absoluto de la integral definida de la función entre –3 y 0 y el valor absoluto de la integral definida entre 0 y 1.

$$\int_{-3}^{0} -2x^3-4x^2+6x dx =$$

$$=\left[-2\frac{x^4}{4}-4\frac{x^3}{3}+6\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{0}=\left[-\frac{x^4}{2}-4\frac{x^3}{3}+3x^2\right]_{-3}^{0}=$$

$$=\left[-\frac{0^4}{2}-4\frac{0^3}{3}+3\cdot 0^2\right]-\left[-\frac{(-3)^4}{2}-4\frac{(-3)^3}{3}+3(-3)^2\right]=$$

$$=\frac{81}{2}-36-27=\frac{81-126}{2}=\frac{-45}{2}$$



$$\int_{0}^{1} -2x^3-4x^2+6x dx=\left[-\frac{x^4}{2}-4\frac{x^3}{3}+3x^2\right]_{0}^{1}=$$

$$=\left[-\frac{1^4}{2}-4\frac{1^3}{3}+3\right]-\left[-\frac{0^4}{2}-4\frac{0^3}{3}+0\right]=-\frac{1}{2}-\frac{4}{3}+3=\frac{10}{6}$$

El área vale

$$\left|\frac{-45}{2}\right|+\frac{10}{6}=\frac{45}{2}+\frac{10}{6}=\frac{135+10}{6}=\frac{145}{6}=\boxed{24{,}16\,u^2}$$

Ejercicio 3 [3 puntos]
El gasto mensual en alquiler de los inquilinos de la zona centro de determinada ciudad, sigue una distribución normal con desviación típica 73 euros. Una muestra aleatoria de 350 inquilinos da como resultado una renta media de 689,3 euros.

A. [1,5 puntos] Obtener el intervalo de confianza del 93% para la renta media.
B. [1,5 puntos] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 91% sea un tercio del obtenido en el apartado anterior?

X = El gasto mensual en alquiler de un inquilino. X = N(μ, 73)

A. Siendo n = 350 y el nivel de confianza del 93%

Con el nivel de confianza del 93% significa que

$1 - \propto = 0{,}93 \rightarrow \propto = 0{,}07 \rightarrow \propto/2 = 0'035 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}965 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}81}$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(689{,}3 - 1{,}81\cdot\frac{73}{\sqrt{350}}, 689{,}3 + 1{,}81\cdot\frac{73}{\sqrt{350}}\right)$$

El intervalo de confianza es $(682'24, 696'36)$

B. Para un nivel de confianza del 91% averiguamos $z_{\alpha/2}$.

$1 - \propto = 0{,}91 \rightarrow \propto = 0{,}09 \rightarrow \propto/2 = 0'045 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}955 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}695}$

Como el error anterior era $z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}81\cdot\frac{73}{\sqrt{350}} = 7{,}062$

Y ahora deseamos un tercio del error anterior, sería $\frac{7{,}062}{3} = 2{,}354$ entonces:

$$z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}354 \Rightarrow 1{,}695\cdot\frac{73}{\sqrt{n}} = 2{,}354 \Rightarrow 1{,}695\cdot\frac{73}{2{,}354} = \sqrt{n} \Rightarrow n = \left(1{,}695\cdot\frac{73}{2{,}354}\right)^2 = 2762{,}94$$

El tamaño mínimo de la muestra es 2763 inquilinos.