UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – JULIO 2020

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INDICACIONES

1. El estudiante realizará solo **tres ejercicios elegidos entre los seis de que consta el examen.**
2. Una vez elegido un ejercicio ha de hacerlo completo (todos sus apartados).
3. No se admitirá ningún resultado si no está debidamente razonado.
4. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada ejercicio y de cada apartado.
5. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.
6. Si se realizan más de tres ejercicios solo se corregirán los tres primeros, según el orden que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.
7. **La calificación del examen será el resultado de la puntuación obtenida entre 0,75**.

BLOQUE 1

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]
Una empresa del sector alimentario lanza al mercado dos nuevas bebidas, A y B, compuestas de zumos de frutas combinados. La composición de cada litro de bebida es la siguiente:

	Zumo de piña	Zumo de mango	Zumo de papaya
A	0,5 litros	0,5 litros	
B	0,4 litros		0,6 litros

El precio de venta fijado es de 1,5 euros por litro de A y de 1,75 euros por litro de B.
Semanalmente se cuenta con 20 000 litros de zumo de piña, con 15 000 de zumo de mango y con 15 000 de zumo de papaya.
Determinar los litros que deben producirse semanalmente de cada bebida para obtener unos ingresos semanales máximos. ¿A cuánto ascienden dichos ingresos?

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]
Una tienda de electrodomésticos ha vendido 750 televisores de tres modelos diferentes, A, B y C. Los ingresos totales obtenidos han sido de 230 400 euros. El precio de venta del modelo A era de 320 euros; el del modelo B, un 20 % más barato que A; y el del C, un 10 % más caro que A. Además, de A y C se han vendido, en total, el doble de unidades que de B.
A. [0,9 PUNTO] Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular cuántas unidades se han vendido de cada modelo de televisor.
B. [0,8 PUNTO] Analizar la compatibilidad de dicho sistema.
C. [0,8 PUNTOS] Resolverlo.

BLOQUE 2

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

A. [2,5 PUNTOS] Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-2}$ obtener sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

A. [1,25 PUNTOS] Dada la función $f(x)=\dfrac{2x+4}{x^2+5x+6}$

1. [0,25 PUNTOS] ¿En qué puntos es discontinua?
2. [0,5 PUNTOS] ¿Se puede definir de nuevo la función para evitar alguna discontinuidad?
3. [0,5 PUNTOS] Calcular los dos límites laterales en x = –3. Interpretar gráficamente lo que ocurre en torno a dicho valor.

B. [1,25 PUNTOS] Dada la función $f(x)=\begin{cases} ax^2+2x-1 & si \quad x\le -1 \\ x^2-5 & si \quad -1<x\le 3 \\ \dfrac{b+x}{3x-2} & si \quad x>3 \end{cases}$

determinar los valores de a y b para los que la función es continua en x = –1 y en x = 3.

BLOQUE 3

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

A. [1,25 PUNTOS] El precio de alquiler de viviendas en un determinado barrio de una gran ciudad sigue una distribución normal con desviación típica 265 euros. Queremos que el error cometido al estimar el precio medio de alquiler con un nivel de confianza del 97 % sea 20,7 euros. ¿Cuántas viviendas hemos de tomar aleatoriamente para calcular la estimación?

B. [1,25 PUNTOS] En el caso de una población de tamaño pequeño, el precio de alquiler sigue una distribución normal con desviación típica 134 euros. Una muestra aleatoria de 357 viviendas da como resultado un alquiler medio de 448 euros. Obtener el intervalo de confianza del 93 % para el precio medio de alquiler.

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

Una empresa juguetera lanza al mercado un nuevo modelo de balón de playa, que fabrica en tres plantas, A, B y C, de las que salen respectivamente el 45 %, 21 % y el 34 % de la producción total. Se ha detectado un fallo en la máquina utilizada en cada planta para aplicar los colores. De hecho, sale defectuoso el 1 % de los balones procedentes de la planta A, el 3 % de los provenientes de la B, y el 2 % de los de la C.

Seleccionamos un balón al azar de entre todos los que han salido de las tres plantas:

A. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso y haya pasado por la máquina de la planta A?

B. [1,25 PUNTOS] Si no es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya salido de la máquina de la planta B?

SOLUCIONES

BLOQUE 1

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]
Una empresa del sector alimentario lanza al mercado dos nuevas bebidas, A y B, compuestas de zumos de frutas combinados. La composición de cada litro de bebida es la siguiente:

	Zumo de piña	Zumo de mango	Zumo de papaya
A	0,5 litros	0,5 litros	
B	0,4 litros		0,6 litros

El precio de venta fijado es de 1,5 euros por litro de A y de 1,75 euros por litro de B.
Semanalmente se cuenta con 20 000 litros de zumo de piña, con 15 000 de zumo de mango y con 15 000 de zumo de papaya.
Determinar los litros que deben producirse semanalmente de cada bebida para obtener unos ingresos semanales máximos. ¿A cuánto ascienden dichos ingresos?

Llamemos "x" al número de litros de la bebida A e "y" al número de litros de la bebida B.

Para establecer las restricciones completamos la tabla proporcionada en el enunciado del ejercicio.

	Zumo de piña	Zumo de mango	Zumo de papaya	Ingresos
Nº de litros de A (x)	0,5x litros	0,5x litros		1,5x
Nº de litros de B (y)	0,4y litros		0,6y litros	1,75y
TOTALES	$0,5x+0,4y$	$0,5x$	$0,6y$	$1,5x+1,75y$

La función a maximizar son los ingresos $f(x,y)=1,5x+1,75y$.
Sometida a las restricciones:

"*Semanalmente se cuenta con 20 000 litros de zumo de piña*" → $0,5x+0,4y\leq 20000$

"*Semanalmente se cuenta con 15 000 de zumo de mango*" → $0,5x\leq 15000$

"*Semanalmente se cuenta con 15 000 de zumo de papaya*" → $0,6y\leq 15000$

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\quad y\geq 0$

Reuniendo las restricciones.

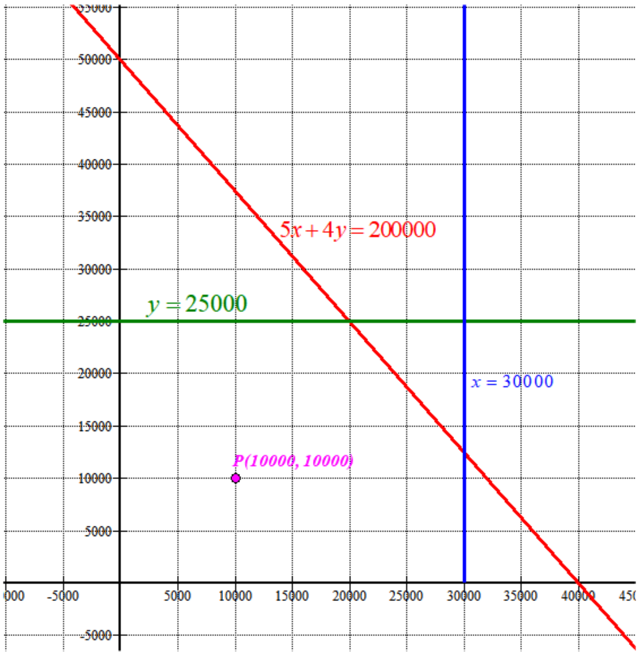
$$\left.\begin{array}{l}0,5x+0,4y\leq 20000\\0,5x\leq 15000\\0,6y\leq 15000\\x\geq 0;\quad y\geq 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}5x+4y\leq 200000\\x\leq 30000\\y\leq 25000\\x\geq 0;\quad y\geq 0\end{array}\right\}$$

Representamos las rectas que delimitan la región factible.

$5x+4y=200000$	
x	$y=\dfrac{200000-5x}{4}$
0	50000
40000	0

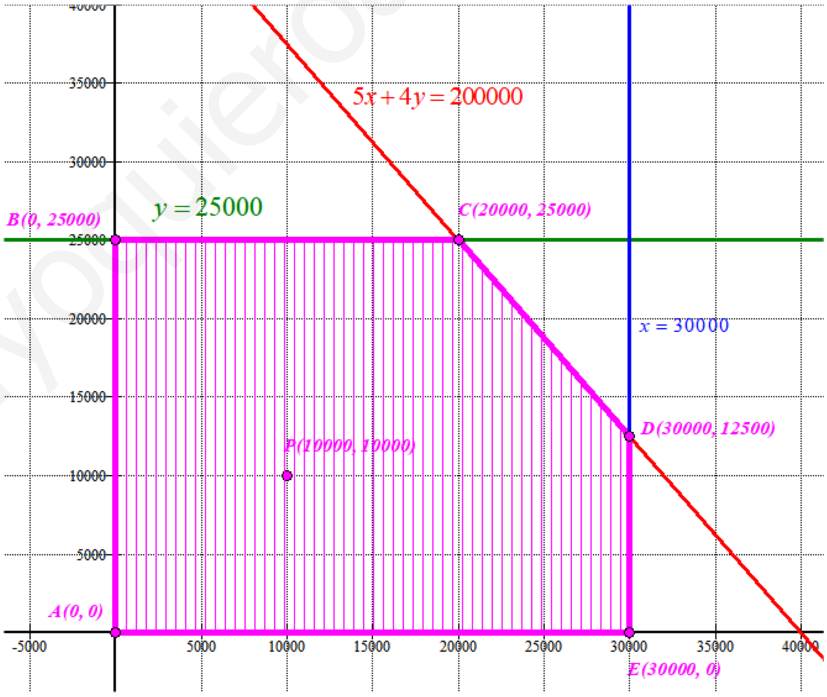
$x=30000$; *recta vertical* $y=25000$; *recta horizontal*

$x\geq 0;\quad y\geq 0$; *primer cuadrante*



Comprobamos si el punto P(10000, 10000) cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 50000+40000\leq 200000 \\ 10000\leq 30000 \\ 10000\leq 25000 \\ 10000\geq 0;\quad 10000\geq 0 \end{array}\right\}$$ Son ciertas. La región factible es la zona rayada.



Valoramos la función $f(x,y)=1,5x+1,75y$ en cada vértice en busca de un valor máximo.

A(0,0) → $f(0,0)=0$

B(0, 25000) → $f(0,25000)=1,75\cdot 25000=43750$ €

C(20000, 25000) → $f(20000,25000)=1,5\cdot 20000+1,75\cdot 25000=$ 73750 €

D(30000, 12500)→ $f(30000,12500)=1,5\cdot 30000+1,75\cdot 12500=66875$ €

E(30000, 0) → $f(30000,0)=45000$ €

Los máximos ingresos cumpliendo las restricciones son de 73 750 € y se consiguen en el punto C(20000, 25000), es decir, con 20 000 litros de A y 25 000 litros de B.

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]
Una tienda de electrodomésticos ha vendido 750 televisores de tres modelos diferentes, A, B y C. Los ingresos totales obtenidos han sido de 230 400 euros. El precio de venta del modelo A era de 320 euros; el del modelo B, un 20 % más barato que A; y el del C, un 10 % más caro que A. Además, de A y C se han vendido, en total, el doble de unidades que de B.
A. [0,9 PUNTO] Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular cuántas unidades se han vendido de cada modelo de televisor.
B. [0,8 PUNTO] Analizar la compatibilidad de dicho sistema.
C. [0,8 PUNTOS] Resolverlo.

Llamamos "a" al número de televisores del modelo A vendidos, "b" al número de televisores modelo B y "c" al número de televisores del modelo C.

A.

"*Ha vendido 750 televisores*" → $a+b+c=750$

"*De A y C se han vendido, en total, el doble de unidades que de B*" → $a+c=2b$

"*El precio de venta del modelo A era de 320 euros; el del modelo B, un 20 % más barato que A; y el del C, un 10 % más caro que A*" →El modelo B cuesta 320 · 0,8 =256 euros, el modelo C cuesta 320 · 1,1 = 352 euros. Como los ingresos son de 230400 euros →
$320a+256b+352c=230400$

Reunimos las ecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=750 \\ a+c=2b \\ 320a+256b+352c=230400 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b+c=750 \\ a+c=2b \\ 10a+8b+11c=7200 \end{array}\right\}$$

B. Aplicamos Gauss y así lo dejamos casi resuelto.

$$\left.\begin{array}{l} a \quad +b \quad +c=750 \\ a \quad -2b+c=0 \\ 10a+8b+11c=7200 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{ccccc} a & -2b & +c & = & 0 \\ -a & -b & -c & = & -750 \\ \hline & -3b & & = & -750 \end{array} \to \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} -10\cdot\text{Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{ccccc} 10a & +8b & +11c & = & 7200 \\ -10a & -10b & -10c & = & -7500 \\ \hline & -2b & +c & = & -300 \end{array} \to \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a \quad +b \quad +c=750 \\ \quad -3b \quad\quad =-750 \\ \quad -2b \quad +c=-300 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Cambio ecuación 3ª por 2ª} \\ \text{y las incógnitas de lugar} \\ \text{para conseguir un sistema} \\ \text{triangular} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a \quad +c \quad +b=750 \\ c-2b=-300 \\ -3b=-750 \end{array}\right\}$$

El sistema tiene solución única. Es compatible determinado.

C.

$$\left.\begin{array}{r} a+c+b=750 \\ c-2b=-300 \\ -3b=-750 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a+c+b=750 \\ c-2b=-300 \\ \boxed{b=\frac{-750}{-3}=250} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a+c+250=750 \\ c-500=-300 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} a+c=500 \\ \boxed{c=200} \end{array}\right\} \Rightarrow a+200=500 \Rightarrow \boxed{a=300}$$

Se han vendido 300 televisores del modelo A, 250 del modelo B y 200 del modelo C.

BLOQUE 2

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

A. [2,5 PUNTOS] Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-2}$ obtener sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

El dominio de esta función es $\mathbb{R}-\{2\}$.

Calculamos su derivada y la igualamos a cero.

$$f(x)=\frac{x^2+x-2}{x-2} \Rightarrow f\,'(x)=\frac{(2x+1)(x-2)-1\cdot(x^2+x-2)}{(x-2)^2}=\frac{2x^2-4x+x-2-x^2-x+2}{(x-2)^2}$$

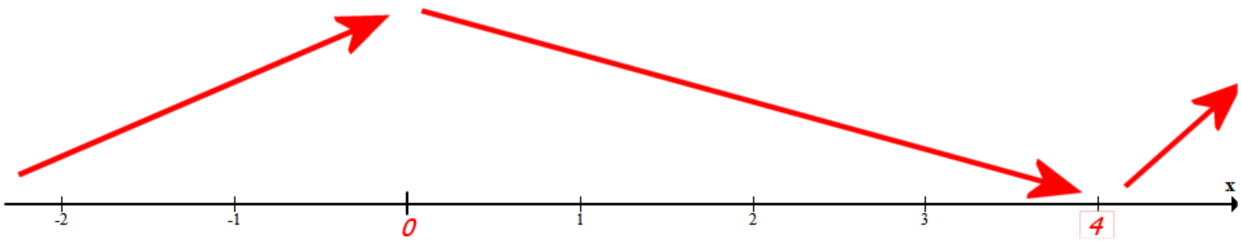
$$f\,'(x)=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$$

$$f\,'(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2-4x}{(x-2)^2}=0 \Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow x(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-4=0 \Rightarrow x=4 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes de 0, entre 0 y 4 y por último después de 4.

- En $(-\infty,0)$ tomamos x = –1, la derivada vale $f\,'(-1)=\dfrac{(-1)^2-4(-1)}{(-1-2)^2}=\dfrac{5}{9}>0$. La función crece en $(-\infty,0)$
- En $(0,2)$ tomamos x = 1, la derivada vale $f\,'(1)=\dfrac{1^2-4}{(1-2)^2}=-3<0$. La función decrece en $(0,2)$
- En $(2,4)$ tomamos x = 3, la derivada vale $f\,'(3)=\dfrac{3^2-12}{(3-2)^2}=-3<0$. La función decrece en $(2,4)$
- En $(4,+\infty)$ tomamos x = 5, la derivada vale $f\,'(5)=\dfrac{5^2-20}{(5-2)^2}=\dfrac{5}{9}>0$. La función crece en $(4,+\infty)$

La función crece en $(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$ y decrece en $(0,2)\cup(2,4)$.



La función presenta un máximo en x = 0 y un mínimo en x = 4.

$$f(0)=\frac{0^2+0-2}{0-2}=1 \qquad f(4)=\frac{4^2+4-2}{4-2}=9$$

Máximo en $(0,1)$ y mínimo en $(4,9)$

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

A. [1,25 PUNTOS] Dada la función $f(x)=\dfrac{2x+4}{x^2+5x+6}$

1. [0,25 PUNTOS] ¿En qué puntos es discontinua?
2. [0,5 PUNTOS] ¿Se puede definir de nuevo la función para evitar alguna discontinuidad?
3. [0,5 PUNTOS] Calcular los dos límites laterales en x = –3. Interpretar gráficamente lo que ocurre en torno a dicho valor.

B. [1,25 PUNTOS] Dada la función $f(x)=\begin{cases} ax^2+2x-1 & si \quad x\le -1 \\ x^2-5 & si \quad -1<x\le 3 \\ \dfrac{b+x}{3x-2} & si \quad x>3 \end{cases}$

determinar los valores de a y b para los que la función es continua en x = –1 y en x = 3.

A.1. Veamos el dominio de $f(x)=\dfrac{2x+4}{x^2+5x+6}$.

Si igualamos a cero el denominador.

$$x^2+5x+6=0 \Rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-24}}{2}=\frac{-5\pm 1}{2}=\begin{cases}\dfrac{-5+1}{2}=-2=x \\ \dfrac{-5-1}{2}=-3=x\end{cases}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-2,-3\}$

Esta función es discontinua en x = –2 y en x = –3.

A.2. Veamos en x = –2.

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{2x+4}{x^2+5x+6}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación}=$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 5 & 6 \\ -2 & & -2 & -6 \\ \hline & 1 & 3 & \lfloor 0 \end{array} \Rightarrow x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

$$2x+4=2(x+2)$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{2\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(x+3)}=\lim_{x\to -2}\frac{2}{x+3}=\frac{2}{-2+3}=2$$

Veamos en x = –3

$$\lim_{x\to -3} f(x)=\lim_{x\to -3}\frac{2x+4}{x^2+5x+6}=\frac{-6+4}{(-3)^2+5(-3)+6}=\frac{-2}{0}=\infty$$

Solo es evitable la discontinuidad en x = –2.

La nueva función sería $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+4}{x^2+5x+6} & si \quad x\neq -2 \\ 2 & si \quad x=-2\end{cases}$.

Esta nueva definición de la función solo es discontinua en x = –3.

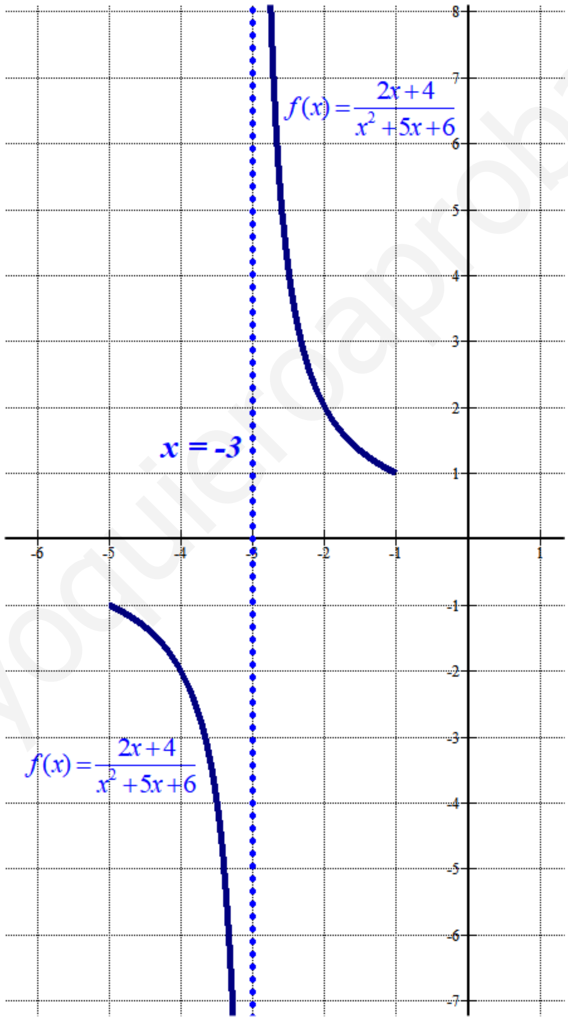
A.3. Los calculamos.

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \frac{2x+4}{x^2+5x+6} = \frac{-2}{0} = +\infty \qquad \lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} \frac{2x+4}{x^2+5x+6} = \frac{-2}{0} = -\infty$$

x	$f(x)=\frac{2x+4}{x^2+5x+6}$
–2.5	4
–2.9	20
–2.99	200

x	$f(x)=\frac{2x+4}{x^2+5x+6}$
–3.1	–20
–3.01	–200
–3.001	–2000

Esto significa que en la asíntota x = –3 la función se comporta como indica el gráfico.



B. Forzamos la continuidad en x = –1.

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to -1^-} ax^2+2x-1 = a-2-1 = a-3 \\ \lim_{x\to -1^+} x^2-5 = 1-5 = -4 \end{cases} \Rightarrow a-3=-4 \Rightarrow \boxed{a=-1}$$

Forzamos la continuidad en x = 3.

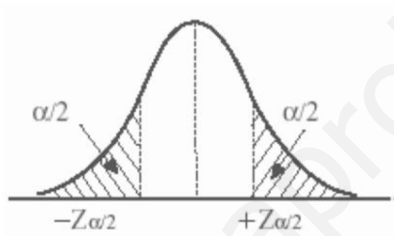
$$\lim_{x\to 3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 3^-} x^2-5 = 9-5 = 4 \\ \lim_{x\to 3^+} \frac{b+x}{3x-2} = \frac{b+3}{9-2} = \frac{b+3}{7} \end{cases} \Rightarrow \frac{b+3}{7} = 4 \Rightarrow b+3=28 \Rightarrow \boxed{b=25}$$

BLOQUE 3

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]
A. [1,25 PUNTOS] El precio de alquiler de viviendas en un determinado barrio de una gran ciudad sigue una distribución normal con desviación típica 265 euros. Queremos que el error cometido al estimar el precio medio de alquiler con un nivel de confianza del 97 % sea 20,7 euros. ¿Cuántas viviendas hemos de tomar aleatoriamente para calcular la estimación?
B. [1,25 PUNTOS] En el caso de una población de tamaño pequeño, el precio de alquiler sigue una distribución normal con desviación típica 134 euros. Una muestra aleatoria de 357 viviendas da como resultado un alquiler medio de 448 euros. Obtener el intervalo de confianza del 93 % para el precio medio de alquiler.

A. X = Precio de alquiler de vivienda
X = N(**μ**, 265)
Con un nivel de confianza del 97%

$1 - \alpha = 0{,}97 \rightarrow \alpha = 0{,}03 \rightarrow \alpha/2 = 0'015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}17}$



Queremos encontrar un tamaño mínimo de la muestra para que el error sea menor de 20,7 €.

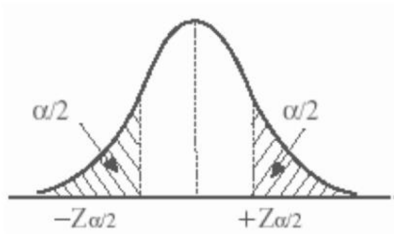
$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{265}{\sqrt{n}} = 20.7 \Rightarrow \frac{2.17 \cdot 265}{20.7} = \sqrt{n} \Rightarrow n = \left(\frac{2.17 \cdot 265}{20.7}\right)^2 = 771.739$$

El tamaño mínimo es de 772 viviendas.

B.
X = Precio de alquiler de vivienda
X = N(**μ**, 134)
n = 357
$\bar{x} = 448$

Con un nivel de confianza del 93%

$1 - \alpha = 0{,}93 \rightarrow \alpha = 0{,}07 \rightarrow \alpha/2 = 0'035 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}965 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}81}$



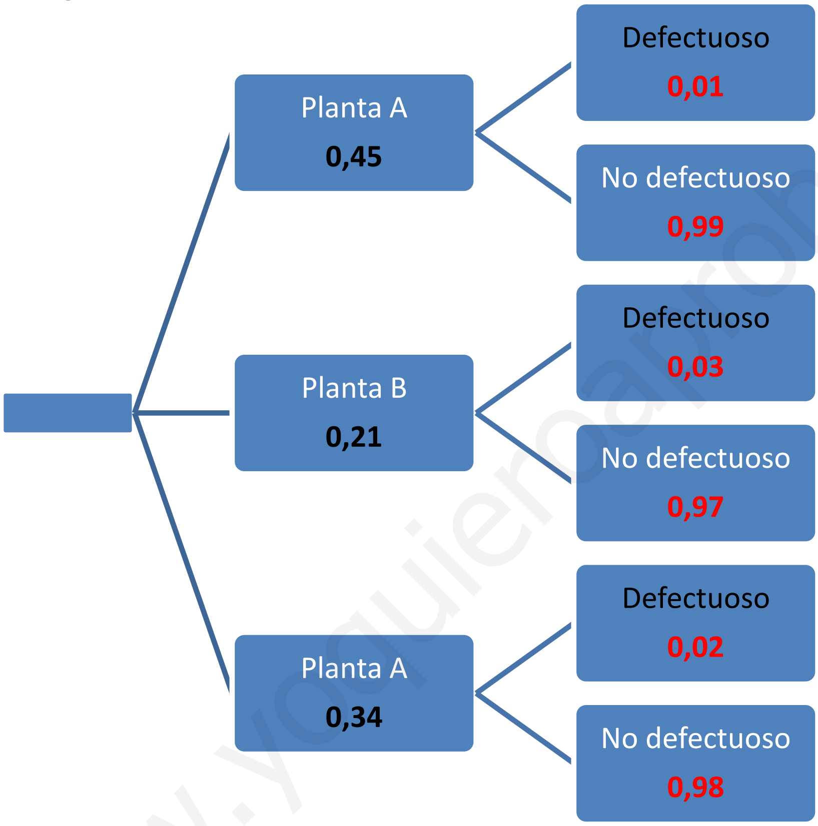
$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.81 \cdot \frac{134}{\sqrt{357}} = 12.837$$

El intervalo de confianza es

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(448 - 12.837, 448 + 12.837\right) = \left(435.163, 460.837\right)$$

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]
Una empresa juguetera lanza al mercado un nuevo modelo de balón de playa, que fabrica en tres plantas, A, B y C, de las que salen respectivamente el 45 %, 21 % y el 34 % de la producción total. Se ha detectado un fallo en la máquina utilizada en cada planta para aplicar los colores. De hecho, sale defectuoso el 1 % de los balones procedentes de la planta A, el 3 % de los provenientes de la B, y el 2 % de los de la C.
Seleccionamos un balón al azar de entre todos los que han salido de las tres plantas:
A. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso y haya pasado por la máquina de la planta A?
B. [1,25 PUNTOS] Si no es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya salido de la máquina de la planta B?

Realizamos el diagrama de árbol.



A. Ocurre en la rama superior y la probabilidad pedida es:

$$P(\text{De planta A y No defectuoso}) = 0,45 \cdot 0,99 = \boxed{0.4455}$$

B. Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(Planta\ B / No\ defectuoso) = \frac{P(Planta\ B \cap No\ defectuoso)}{P(No\ defectuoso)} =$$

$$= \frac{0,21 \cdot 0,97}{0,45 \cdot 0,99 + 0,21 \cdot 0,97 + 0,34 \cdot 0,98} = \frac{0,2037}{0,9824} = \boxed{0,2073}$$