EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – JULIO 2022

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INDICACIONES

1. El examen consta de seis ejercicios, de los cuales se resolverán únicamente tres (cualesquiera).
2. En caso de intentar resolver más de tres ejercicios, se corregirán únicamente los tres primeros que aparezcan en el cuadernillo del examen.
3. La puntuación máxima de cada ejercicio es de 2.5 puntos (dentro de cada ejercicio, la puntuación máxima de cada apartado se indica entre corchetes). La nota del examen será el resultado de dividir por 0.75 la suma de la puntuación obtenida en los tres ejercicios.
4. Se valorará positivamente la explicación de los diferentes pasos seguidos en la resolución de cada ejercicio, así como la claridad de exposición. No se admitirá ningún resultado que no esté debidamente justificado.
5. Queda prohibido el uso de calculadoras gráficas y/o programables, así como el de cualquier dispositivo con capacidad de almacenar y/o transmitir datos.
6. Los teléfonos móviles deberán estar apagados durante el examen.

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

En un día de playa y bajo un sol radiante Fabiola se acerca al chiringuito y compra 3 helados, 2 granizados y 2 horchatas, pagando un total de 20 €. Al comprobar el ticket se da cuenta de que le han cobrado un helado y una horchata de más. Tras reclamar, el vendedor le devuelve 5 €. Además, para compensar el error, le ofrece llevarse en promoción un helado y un granizado por 2 €, lo que supone un descuento del 50 % respecto a sus precios originales.

A. [1,25 PUNTOS] Plantee el sistema de ecuaciones que permita calcular el precio (sin descuento) de un helado, un granizado y una horchata.

B. [1,25 PUNTOS] Resuélvalo.

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Un ganadero pasiego necesita ampliar su explotación de bovino, para lo cual decide comprar vacas de las razas parda y frisona. Como máximo, tiene planeado adquirir un total de 160 vacas para su cría. Cuando llegue el momento de venderlas, por cada ejemplar de parda espera obtener un beneficio neto de 350 €, y por cada frisona uno de 500 €. Tiene claro que no comprará más de 50 pardas ni menos de 70 frisonas. Además, quiere que el número de vacas pardas sea, al menos, una tercera parte del de frisonas.

A. [0,75 PUNTOS] Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

B. [1 PUNTO] Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

C. [0,5 PUNTOS] ¿Cuántas vacas de cada tipo debe comprar para obtener el máximo beneficio?

D. [0,25 PUNTOS] ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

Dadas las funciones $f(x)=-x^2-2x+8$ y $g(x)=2x^2-2x-4$

A. [0,5 PUNTOS] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de ambas funciones.

B. [0,5 PUNTOS] ¿Cuáles y de qué tipo (máximo/mínimo relativo/absoluto) son los extremos de ambas funciones?

C. [0,5 PUNTOS] Dibuje la gráfica de ambas funciones, indicando claramente sus puntos de corte con los ejes OX y OY, así como los puntos de corte entre *f* y *g*.

D. [1 PUNTO] Calcule el área de la región que queda encerrada entre las funciones *f* y *g*.

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

Se sabe que la evolución del precio del oro en el mercado (*P*, expresado en €/kg) a lo largo de un mes de 31 días viene dado por la siguiente función:

$$P(d)=\frac{1}{3}d^3-15d^2+144d+1500 \text{ , } con\ 1\le d\le 31$$

donde *d* indica el día del mes.

A. [1 PUNTO] ¿Qué día del mes habría que vender el oro para obtener la máxima ganancia? ¿A cuánto ascendería dicha ganancia si se vendiesen 4 kg de oro?

B. [1 PUNTO] ¿Qué día del mes es el peor para vender oro? ¿Cuál sería la ganancia si se vendiesen los 4 kg de oro ese día?

C. [0,5 PUNTOS] Si se viese obligado a vender 1 kg de oro entre los días 20 y 31 del mes y quisiera obtener la máxima ganancia, ¿en qué día lo haría? ¿Cuánto ganaría con la venta?

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

La enóloga de una bodega ha determinado que el porcentaje de alcohol presente en sus botellas de vino sigue una distribución normal con una desviación típica de 0,53 %. Una muestra de 120 botellas, escogidas al azar, arroja un valor promedio para el porcentaje de alcohol por botella de 12,05 %.

A. [1,25 PUNTOS] Obtenga el intervalo de confianza del 95 % para el valor promedio del porcentaje de alcohol por botella.

B. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el número mínimo de botellas que habría que considerar para que el error cometido al estimar el valor medio del porcentaje de alcohol por botella, con un nivel de confianza del 97,5 %, fuese de 0,1 %?

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

El 65 % de los clientes de un cierto supermercado compra leche de origen animal, el 25 % compra leche de origen vegetal y el 10 % restante no compra leche de ningún tipo. Además, el 20 % de los que compran leche de origen animal, el 70 % de los que compran leche de origen vegetal y el 10 % de los que no compran leche de ningún tipo compran también galletas de soja. Si se escoge al azar un cliente del supermercado:

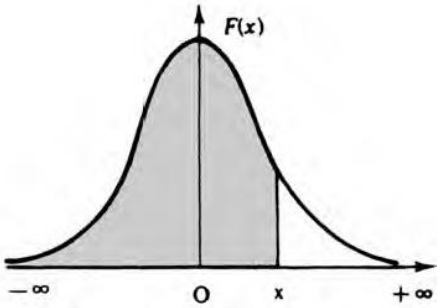
A. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que compre leche de origen animal y galletas de soja?

B. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que compre leche de origen vegetal y no compre galletas de soja?

C. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que compre galletas de soja?

D. [0,75 PUNTOS] Si no compra galletas de soja, ¿cuál es la probabilidad de que compre leche de origen vegetal?

$$F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$



x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999

SOLUCIONES

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]
En un día de playa y bajo un sol radiante Fabiola se acerca al chiringuito y compra 3 helados, 2 granizados y 2 horchatas, pagando un total de 20 €. Al comprobar el ticket se da cuenta de que le han cobrado un helado y una horchata de más. Tras reclamar, el vendedor le devuelve 5 €. Además, para compensar el error, le ofrece llevarse en promoción un helado y un granizado por 2 €, lo que supone un descuento del 50 % respecto a sus precios originales.
A. [1,25 PUNTOS] Plantee el sistema de ecuaciones que permita calcular el precio (sin descuento) de un helado, un granizado y una horchata.
B. [1,25 PUNTOS] Resuélvalo.

A. Llamamos "x" al precio de un helado, "y" al precio de un granizado y "z" al precio de una horchata.

"Compra 3 helados, 2 granizados y 2 horchatas, pagando un total de 20 €. Al comprobar el ticket se da cuenta de que le han cobrado un helado y una horchata de más" → $(3+1)x+2y+(2+1)z=20-5$.

"Al comprobar el ticket se da cuenta de que le han cobrado un helado y una horchata de más. Tras reclamar, el vendedor le devuelve 5 €. Un helado y una horchata valen los 5 € que le devuelven" → $x+z=5$

"Además, para compensar el error, le ofrece llevarse en promoción un helado y un granizado por 2 €, lo que supone un descuento del 50 % respecto a sus precios originales" → $0.5x+0.5y=2$.

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l}(3+1)x+2y+(2+1)z=20\\ x+z=5\\ 0.5x+0.5y=2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}4x+2y+3z=20\\ x+z=5\\ x+y=4\end{array}\right\}$$

B. Resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{array}{l}4x+2y+3z=20\\ x+z=5\\ x+y=4\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}4x+2y+3z=20\\ x+z=5\\ x=4-y\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}4(4-y)+2y+3z=20\\ 4-y+z=5\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}16-4y+2y+3z=20\\ -y+z=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-2y+3z=4\\ z=1+y\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2y+3(1+y)=4\Rightarrow -2y+3+3y=4\Rightarrow \boxed{y=1}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\boxed{z=1+1=2}\\ \boxed{x=4-1=3}\end{array}\right.$$

Un helado cuesta 3 euros, un granizado vale 1 euro y una horchata vale 2 euros.

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]
Un ganadero pasiego necesita ampliar su explotación de bovino, para lo cual decide comprar vacas de las razas parda y frisona. Como máximo, tiene planeado adquirir un total de 160 vacas para su cría. Cuando llegue el momento de venderlas, por cada ejemplar de parda espera obtener un beneficio neto de 350 €, y por cada frisona uno de 500 €. Tiene claro que no comprará más de 50 pardas ni menos de 70 frisonas. Además, quiere que el número de vacas pardas sea, al menos, una tercera parte del de frisonas.
A. [0,75 PUNTOS] Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.
B. [1 PUNTO] Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.
C. [0,5 PUNTOS] ¿Cuántas vacas de cada tipo debe comprar para obtener el máximo beneficio?
D. [0,25 PUNTOS] ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

A. Llamamos x = número de vacas de la raza parda, y = número de vacas de la raza frisona.

La función objetivo que deseamos maximizar son los beneficios que vienen expresados como:

$$B(x,y)=350x+500y$$

Las restricciones son:

"*Como máximo, tiene planeado adquirir un total de 160 vacas para su cría*" → $x+y\leq 160$

"*No comprará más de 50 pardas ni menos de 70 frisonas*" → $x\leq 50;\ y\geq 70$

"*Quiere que el número de vacas pardas sea, al menos, una tercera parte del de frisonas*" → $x\geq \frac{y}{3}$

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$

Reunimos todas las inecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y\leq 160 \\ x\leq 50;\ y\geq 70 \\ x\geq \frac{y}{3} \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y\leq 160 \\ y\leq 3x \\ x\leq 50;\ y\geq 70 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

B. Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x+y=160$

x	$y=160-x$
0	160
40	120
50	110

$y=3x$

x	$y=3x$
0	0
40	120
70	210

$x=50$

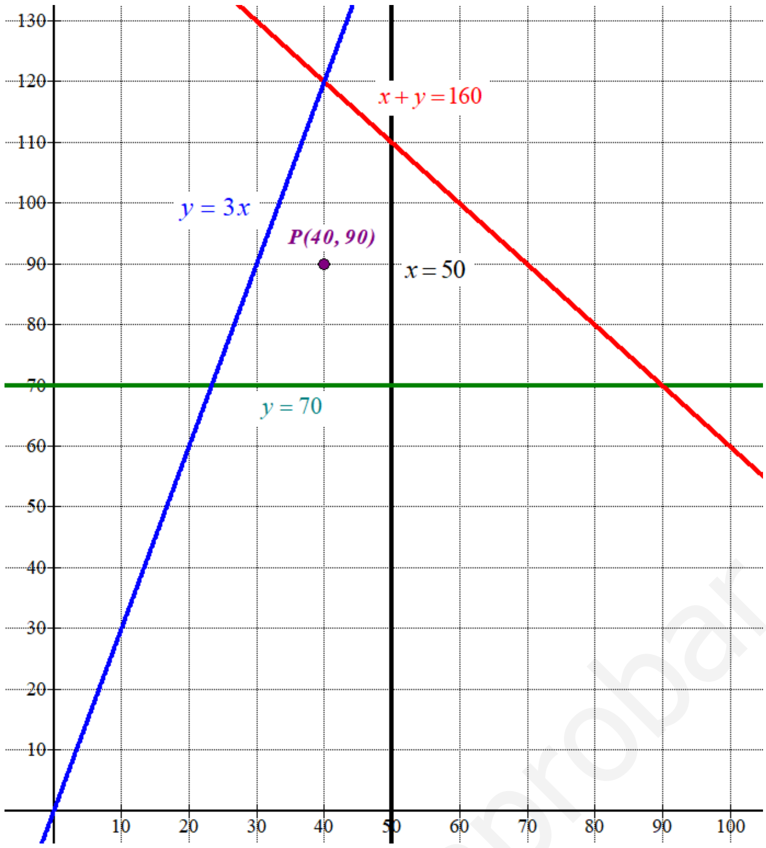
Recta vertical

$y=70$

x	$y=70$
0	70
50	70

$x\geq 0;\ y\geq 0$

Primer cuadrante

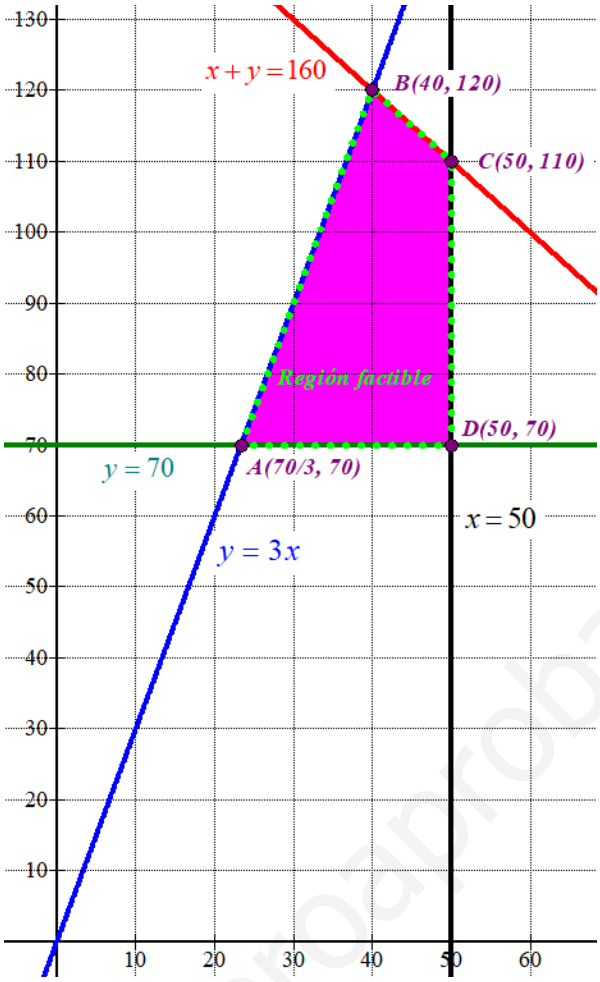


Como las restricciones del problema son $\left.\begin{array}{l} x+y\leq 160 \\ y\leq 3x \\ x\leq 50;\ y\geq 70 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas azul y roja, por encima de la recta horizontal verde y a la izquierda de la recta vertical negra.

Comprobamos que el punto P(40, 90) que pertenece a dicha región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 40+90\leq 160 \\ 90\leq 3\cdot 40 \\ 40\leq 50;\ 90\geq 70 \\ 40\geq 0;\ 90\geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas del vértice A.

$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=70 \\ y=3x \end{array}\right\} \Rightarrow 70=3x \Rightarrow x=\frac{70}{3} \Rightarrow A(70/3,70)$$

Los vértices son A(70/3, 70); B(40, 120); C(50, 110) y D(50, 70).

C. Valoramos la función objetivo $B(x,y)=350x+500y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(70/3, 70) → $B(70/3,70)=350\frac{70}{3}+35000 \simeq 43166.66$

B(40, 120) → $B(40,120)=14000+60000=74000$ ¡Máximo!

C(50, 110) → $B(50,110)=17500+55000=72500$

$D(50,70)$ → $B(50,70)=17500+35000=52500$

El máximo beneficio es de 74 000 € y se produce en el vértice B (40, 120) que significa comprar 40 vacas pardas y 120 frisonas.

D. El máximo beneficio es de 74 000 €.

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]
Dadas las funciones $f(x)=-x^2-2x+8$ y $g(x)=2x^2-2x-4$

A. [0,5 PUNTOS] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de ambas funciones.
B. [0,5 PUNTOS] ¿Cuáles y de qué tipo (máximo/mínimo relativo/absoluto) son los extremos de ambas funciones?
C. [0,5 PUNTOS] Dibuje la gráfica de ambas funciones, indicando claramente sus puntos de corte con los ejes OX y OY, así como los puntos de corte entre *f* y *g*.
D. [1 PUNTO] Calcule el área de la región que queda encerrada entre las funciones *f* y *g*.

A. Calculo la derivada, la igualo a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x)=-x^2-2x+8 \Rightarrow f'(x)=-2x-2$$
$$f'(x)=0 \Rightarrow -2x-2=0 \Rightarrow 2x=-2 \Rightarrow \boxed{x=-1}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

En el intervalo $(-\infty,-1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2)=-2(-2)-2=2>0$. La función crece en $(-\infty,-1)$.

En el intervalo $(-1,+\infty)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0)=-0-2=-2<0$. La función decrece en $(-1,+\infty)$.

La función $f(x)$ crece en $(-\infty,-1)$ y decrece en $(-1,+\infty)$.

Repetimos el proceso con la función $g(x)$

$$g(x)=2x^2-2x-4 \Rightarrow g'(x)=4x-2$$
$$f'(x)=0 \Rightarrow 4x-2=0 \Rightarrow \boxed{x=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

En el intervalo $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $g'(0)=0-2=-2<0$. La función decrece en $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$.

En el intervalo $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $g'(1)=4-2=2>0$. La función crece en $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

La función $g(x)$ decrece en $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ y crece en $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

B. Según lo visto en el apartado anterior la función *f(x)* presenta un máximo relativo en $x = -1$ y la función *g(x)* presenta un mínimo relativo en $x=\frac{1}{2}$.

Como $f(-1)=-(-1)^2-2(-1)+8=-1+2+8=9$ y $g\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\left(\frac{1}{2}\right)-4=\frac{1}{2}-5=\frac{-9}{2}$ las coordenadas de los puntos son:

Máximo relativo de *f(x)* es (–1, 9).

Mínimo relativo de *g(x)* es $\left(\frac{1}{2},\frac{-9}{2}\right)$.

C. Puntos de corte de ambas funciones.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=-x^2-2x+8 \\ g(x)=2x^2-2x-4 \\ f(x)=g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow -x^2-2x+8=2x^2-2x-4 \Rightarrow -3x^2+12=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x^2=-12 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2 \Rightarrow \begin{cases} f(2)=-4-4+8=0 \to \boxed{A(2,0)} \\ f(-2)=-4+4+8=8 \to \boxed{B(-2,8)} \end{cases}$$

Puntos de corte con el eje OY (*x = 0*).

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=-x^2-2x+8 \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=8 \Rightarrow C(0,8)$$

$$\left.\begin{array}{l} g(x)=2x^2-2x-4 \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow g(0)=-4 \Rightarrow D(0,-4)$$

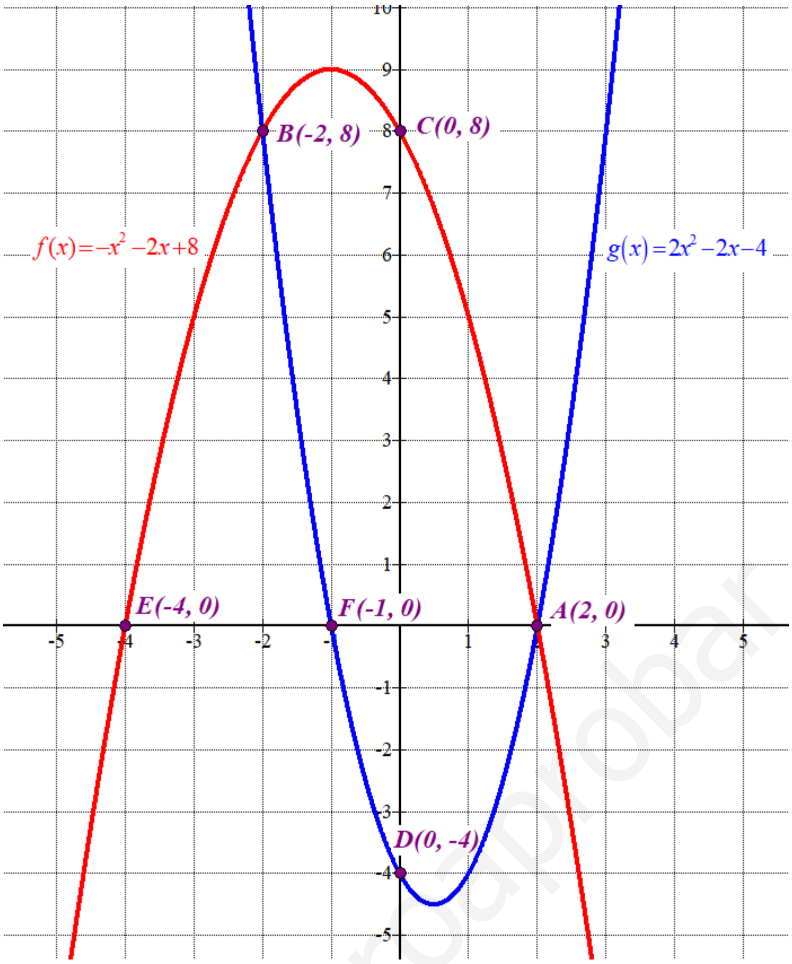
Puntos de corte con el eje OX (*y = 0*).

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=-x^2-2x+8 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -x^2-2x+8=0 \Rightarrow$$

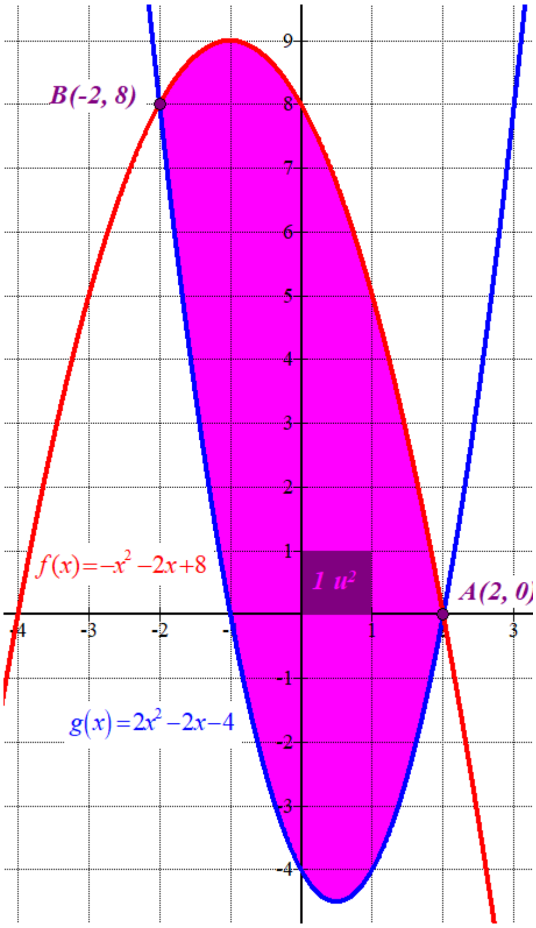
$$\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(-1)8}}{-2}=\frac{2\pm 6}{-2}=\begin{cases} \frac{2+6}{-2}=-4 \to E(-4,0) \\ \frac{2-6}{-2}=2 \to A(2,0) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} g(x)=2x^2-2x-4 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x^2-2x-4=0 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(-2)}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases} \frac{1+3}{2}=2 \to A(2,0) \\ \frac{1-3}{2}=-1 \to F(-1,0) \end{cases}$$



D. El área de la región encerrada entre ambas curvas es la integral definida entre –2 y 2 de $f(x)-g(x)$.



$$Área=\int_{-2}^{2} f(x)-g(x)\,dx=$$

$$=\int_{-2}^{2} -x^2-2x+8-\left(2x^2-2x-4\right)dx=$$

$$=\int_{-2}^{2} -x^2-2x+8-2x^2+2x+4dx=$$

$$=\int_{-2}^{2} -3x^2+12dx=\left[-x^3+12x\right]_{-2}^{2}=$$

$$=\left[-2^3+12\cdot 2\right]-\left[-(-2)^3+12(-2)\right]=$$

$$=-8+24-8+24=\boxed{32u^2}$$

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]
Se sabe que la evolución del precio del oro en el mercado (P, expresado en €/kg) a lo largo de un mes de 31 días viene dado por la siguiente función:

$$P(d)=\frac{1}{3}d^3-15d^2+144d+1500\ ,\ con\ 1\le d\le 31$$

donde d indica el día del mes.

A. [1 PUNTO] ¿Qué día del mes habría que vender el oro para obtener la máxima ganancia? ¿A cuánto ascendería dicha ganancia si se vendiesen 4 kg de oro?

B. [1 PUNTO] ¿Qué día del mes es el peor para vender oro? ¿Cuál sería la ganancia si se vendiesen los 4 kg de oro ese día?

C. [0,5 PUNTOS] Si se viese obligado a vender 1 kg de oro entre los días 20 y 31 del mes y quisiera obtener la máxima ganancia, ¿en qué día lo haría? ¿Cuánto ganaría con la venta?

A. Derivamos la función e igualamos a cero.

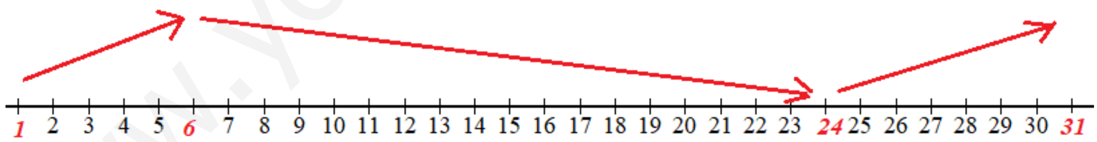
$$P(d)=\frac{1}{3}d^3-15d^2+144d+1500\Rightarrow P'(d)=3\frac{1}{3}d^2-30d+144$$

$$P'(d)=0\Rightarrow d^2-30d+144=0\Rightarrow d=\frac{30\pm\sqrt{(-30)^2-4\cdot 144}}{2}=\frac{30\pm 18}{2}=\begin{cases}\frac{30+18}{2}=\boxed{24=d}\\ \frac{30-18}{2}=\boxed{6=d}\end{cases}$$

Sustituimos estos valores en la segunda derivada y vemos su signo.

$$P''(d)=2d-30\Rightarrow\begin{cases}P''(24)=48-30=18>0\rightarrow d=24 \text{ es mínimo relativo}\\ P''(6)=12-30=-18<0\rightarrow d=6 \text{ es máximo relativo}\end{cases}$$

La función sigue el esquema siguiente.



Valoramos la función en los extremos del intervalo [1, 31] y lo comparamos con el valor en el máximo y mínimo relativos.

$$\left.\begin{array}{l}P(1)=\frac{1}{3}\cdot 1^3-15\cdot 1^2+144\cdot 1+1500=\frac{4888}{3}\simeq 1629.33\\ P(6)=\frac{1}{3}\cdot 6^3-15\cdot 6^2+144\cdot 6+1500=1896 \text{ ¡Máximo absoluto!}\\ P(24)=\frac{1}{3}\cdot 24^3-15\cdot 24^2+144\cdot 24+1500=924 \text{ ¡Mínimo absoluto!}\\ P(31)=\frac{1}{3}\cdot 31^3-15\cdot 31^2+144\cdot 31+1500=\frac{4438}{3}\simeq 1479.33\end{array}\right\}$$

Para obtener la máxima ganancia debe venderse el sexto día del mes. Se vendería a 1896 €/kg. Obtendríamos $1896\cdot 4=7584$ €.

B. El peor día es el día 24 donde el precio de venta tiene un mínimo.

Se obtendría una ganancia de 924 · 4 = 3696 €.

C. Si reducimos el intervalo a [20, 31] tenemos que el día 6 no está incluido en el intervalo. Valoramos la función en los extremos del intervalo y en uno de ellos estará el máximo. Aunque mirando el esquema ya sabemos que el máximo estará en el día 31.

$$\left.\begin{array}{l} P(20)=\frac{1}{3}\cdot 20^3-15\cdot 20^2+144\cdot 20+1500=\frac{3140}{3}\simeq 1046.66 \\ P(31)=\frac{4438}{3}\simeq 1479.33 \text{ ¡Máximo!} \end{array}\right\}$$

Debería venderlo el día 31, obteniendo un precio de 1479.33 €/kg.
Se ganaría 1479.33 €.

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]
La enóloga de una bodega ha determinado que el porcentaje de alcohol presente en sus botellas de vino sigue una distribución normal con una desviación típica de 0,53 %. Una muestra de 120 botellas, escogidas al azar, arroja un valor promedio para el porcentaje de alcohol por botella de 12,05 %.

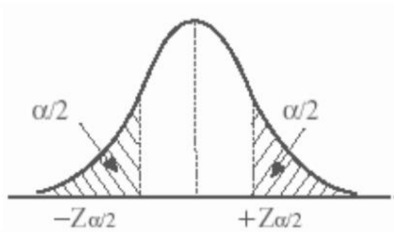
A. [1,25 PUNTOS] Obtenga el intervalo de confianza del 95 % para el valor promedio del porcentaje de alcohol por botella.

B. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el número mínimo de botellas que habría que considerar para que el error cometido al estimar el valor medio del porcentaje de alcohol por botella, con un nivel de confianza del 97,5 %, fuese de 0,1 %?

X = Porcentaje de alcohol presente en las botellas de vino.
X = N(**μ**, 0.53)
Tamaño de muestra = n = 120. $\bar{x} = 12.05$

A. Con un nivel de confianza del 95%

$$1-\alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$$



x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	9750
2.0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{0.53}{\sqrt{120}} = 0.0948$$

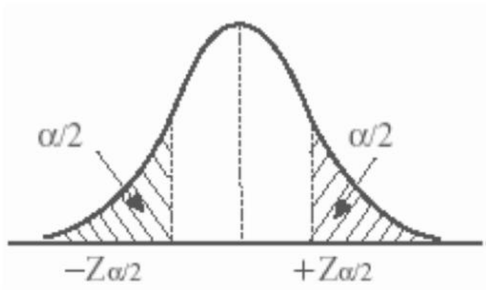
El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = (12.05 - 0.0948, 12.05 + 0.0948) = (11.9552, 12.1448)$$

B.

Con un nivel de confianza del 97.5%

$$1-\alpha = 0.975 \rightarrow \alpha = 0.025 \rightarrow \alpha/2 = 0.0125 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0.9875 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.24}$$



x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904

Queremos encontrar un tamaño mínimo de la muestra para que el error sea 0.1.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.1 = 2.24 \cdot \frac{0.53}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.1\sqrt{n} = 2.24 \cdot 0.53 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.24 \cdot 0.53}{0.1} \Rightarrow$$

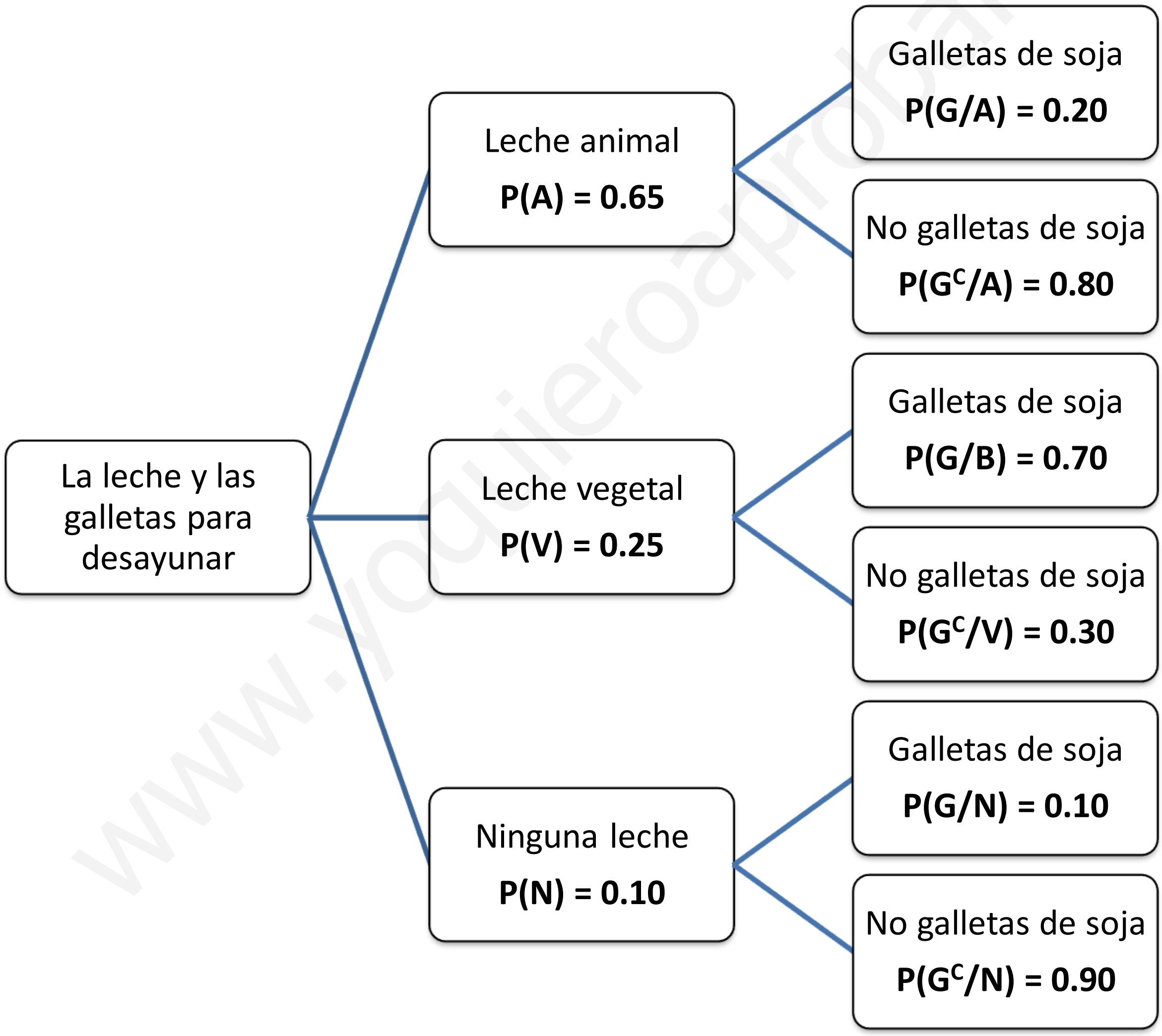
$$\Rightarrow n = \left(\frac{2.24 \cdot 0.53}{0.1}\right)^2 = 140.94$$

Como n debe ser entero y superior al “n” hallado el tamaño mínimo es de 141 botellas.

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]
El 65 % de los clientes de un cierto supermercado compra leche de origen animal, el 25 % compra leche de origen vegetal y el 10 % restante no compra leche de ningún tipo. Además, el 20 % de los que compran leche de origen animal, el 70 % de los que compran leche de origen vegetal y el 10 % de los que no compran leche de ningún tipo compran también galletas de soja. Si se escoge al azar un cliente del supermercado:

A. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que compre leche de origen animal y galletas de soja?
B. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que compre leche de origen vegetal y no compre galletas de soja?
C. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que compre galletas de soja?
D. [0,75 PUNTOS] Si no compra galletas de soja, ¿cuál es la probabilidad de que compre leche de origen vegetal?

Llamamos A = ”Comprar leche de origen animal”, V = “Comprar leche de origen vegetal”, N = “No comprar leche de ningún tipo”, G = “Comprar galletas de soja”.
Realizamos un diagrama de árbol.



A. $P(A \cap G) = P(A)P(G/A) = 0.65 \cdot 0.2 = \boxed{0.13}$

B. $P(V \cap G^C) = P(V)P(G^C/V) = 0.25 \cdot 0.3 = \boxed{0.075}$

C. Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(G) = P(A)P(G/A) + P(V)P(G/V) + P(N)P(G/N) =$$

$$= 0.65 \cdot 0.2 + 0.25 \cdot 0.7 + 0.1 \cdot 0.1 = \boxed{0.315}$$

D. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(V / G^C\right) = \frac{P\left(V \cap G^C\right)}{P\left(G^C\right)} = \frac{P(V)P\left(G^C / V\right)}{1 - P(G)} = \frac{0.25 \cdot 0.3}{1 - 0.315} = \boxed{\frac{15}{137} \simeq 0.109}$$