Universidad Zaragoza 1542

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2021
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS. II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. La nota final será el resultado de sumar las puntuaciones obtenidas en las preguntas realizadas y dividir dicha suma para tres.

1.- (*10 puntos*) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

a.- (*3 puntos*) Calcula $(B-A)^{-1}$.

b.- (*3 puntos*) Calcula la matriz *X*, que verifica $2X-AB=BA$.

c.- (4 *puntos*) Resuelve el sistema de ecuaciones: $C\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2.- (*10 puntos*) Un mayorista de zapatos pone a la venta su stock, en concreto, 800 pares de botas, 1.200 pares de mocasines y 2.100 pares de zapatillas. Lanza dos ofertas, A y B. La oferta A consiste en 1 par de botas, 3 pares de mocasines y 7 pares de zapatillas y se vende a 360 euros. La oferta B consiste en 2 pares de botas y 2 pares de mocasines que vende a 120 euros. Se pide:

a.- *(8 puntos)* Plantea y resuelve un problema de programación lineal que permita calcular el número de lotes de cada oferta que maximiza el ingreso obtenido con la venta. ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?

b.- *(2 puntos)* Razona cuántos pares de botas, mocasines y zapatillas quedarán sin vender en la solución óptima.

3.- (*10 puntos*) Un grupo de jóvenes emprendedores valoran abrir una empresa y, para ello, han encargado un estudio de mercado en el que estimaron que los beneficios para los próximos años, en cientos de miles de euros, vendrán dados por la función:

$$B(t)=\frac{2t-6}{t+4}$$

donde t representa los años transcurridos desde la apertura. Los emprendedores quieren saber:

a.- *(2 puntos)* ¿En qué intervalo la empresa tendrá pérdidas?

b.- *(4 puntos)* En qué momento $t \in [3,10]$ se alcanza el máximo beneficio y a cuántos euros asciende su valor. Justifica la respuesta.

c.- *(2 puntos)* ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para obtener un beneficio de 150.000 €?

d.- *(2 puntos)* En un horizonte infinito de tiempo, ¿existe límite para el beneficio? En caso afirmativo, ¿cuál es ese límite?

4.- (*10 puntos*) Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{a}{1-x} & si \quad x\le 0 \\ bx^2+2x+c & si \quad x>0 \end{cases}$$ donde a,b,c son parámetros reales. Se pide:

a.- *(5 puntos)* Determina los valores de los parámetros para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$, la función tenga un extremo relativo en $x = 1$ y $f'(-1) = -1$. Caracteriza si el extremo es máximo o mínimo.

b.- (*2 puntos*) Calcula, para los valores $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$; $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

c.- *(3 puntos)* Calcula, para los valores $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$; $\int_1^2 f(x)dx$.

5.- (*10 puntos*) Al terminar el bachillerato los 100 alumnos de un Centro, de las modalidades de *Ciencias* y *Artes*, planean viajar por Italia, Francia o Portugal. Entre los 55 alumnos de Ciencias se sabe que 10 quieren ir a Italia, 25 a Francia y 20 a Portugal. En el grupo de Artes hay 30 que quieren ir a Italia y 15 a Portugal. Elegido un alumno al azar, calcula:

a.- *(2,5 puntos*) La probabilidad de que quiera ir a Portugal.

b.- *(2,5 puntos)* Probabilidad de que un alumno que quiera ir a Italia sea de Artes.

c.- *(2,5 puntos)* Probabilidad de que un alumno quiera ir a Francia y sea de Ciencias.

d.- *(2,5 puntos)* Probabilidad de que un alumno de Ciencias quiera ir a Francia.

6.- (*10 puntos*) Se quiere estimar el tiempo diario de conexión a redes sociales de los universitarios. Se sabe que dicho tiempo tiene una distribución normal con desviación típica de 33 minutos (0,55 horas). Se desea construir un intervalo de confianza para la media diaria de conexión a redes sociales. Se pide:

a.- *(6 puntos)* ¿A cuántos estudiantes debemos entrevistar para garantizar que el intervalo de confianza del 97% tenga una amplitud menor o igual a 0,16 horas?

b.- *(3 puntos)* Se ha encuestado a 100 universitarios y se ha obtenido una media de 4 horas al día. Calcula el intervalo de confianza al 97% para la media poblacional.

c.- *(1 punto)* Un informe de cierto Ministerio afirma que la media del tiempo que los universitarios pasan conectados a las redes sociales es de 5 horas al día. Razona, a la vista del apartado **b.-** si hay motivos para dudar de su afirmación.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES

1.- (*10 puntos*) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}\quad y\quad C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

a.- (*3 puntos*) Calcula $(B-A)^{-1}$.

b.- (*3 puntos*) Calcula la matriz *X*, que verifica $2X-AB=BA$.

c.- (4 *puntos*) Resuelve el sistema de ecuaciones: $C\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$.

a.-

$$B-A=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 4 & -1\end{pmatrix}$$

$|B-A|=\begin{vmatrix}0 & 2\\ 4 & -1\end{vmatrix}=-8\neq 0.$ Existe la inversa.

$$(B-A)^{-1}=\frac{Adj\left((B-A)^T\right)}{|B-A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}0 & 4\\ 2 & -1\end{pmatrix}}{-8}=\frac{-1}{8}\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -4 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/8 & 1/4\\ 1/2 & 0\end{pmatrix}$$

b.- Despejo X en la ecuación: $2X-AB=BA\Rightarrow 2X=BA+AB\Rightarrow X=\frac{1}{2}(BA+AB)$

$$\left.\begin{array}{l}AB=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 6 & -3+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 6 & -1\end{pmatrix}\\ \\ BA=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 6\\ -1 & 3+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 6\\ -1 & 5\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow BA+AB=\begin{pmatrix}-3 & 6\\ -1 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 1\\ 6 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 7\\ 5 & 4\end{pmatrix}$$

$$X=\frac{1}{2}(BA+AB)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 7\\ 5 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 7/2\\ 5/2 & 2\end{pmatrix}$$

c.-

$$C\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

La matriz ampliada asociada al sistema es $C/B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$

La transformamos en una matriz triangular equivalente.

$$C/B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -2 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}\text{Fila 2ª} - 2\cdot\text{Fila 1ª}\\ \begin{array}{cccc}2 & 1 & 1 & 0\\ -2 & -2 & 0 & 0\\ \hline 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\\ \text{Nueva fila 2ª}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}\text{Fila 3ª} + \text{Fila 1ª}\\ \begin{array}{cccc}-1 & 1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ \hline 0 & 2 & -2 & 0\end{array}\\ \text{Nueva fila 3ª}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}\text{Fila 3ª} + 2\cdot\text{Fila 2ª}\\ \begin{array}{cccc}0 & 2 & -2 & 0\\ 0 & -2 & 2 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\\ \text{Nueva fila 3ª}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema triangular equivalente al inicial.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y=0\\ -y+z=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=-y\\ z=y\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{\left.\begin{array}{l}x=-t\\ y=t\\ z=t\end{array}\right\},t\in\mathbb{R}}$$

La solución es $x=-t;\ y=t;\ z=t\quad siendo\ t\in\mathbb{R}$

2.- (*10 puntos*) Un mayorista de zapatos pone a la venta su stock, en concreto, 800 pares de botas, 1.200 pares de mocasines y 2.100 pares de zapatillas. Lanza dos ofertas, A y B. La oferta A consiste en 1 par de botas, 3 pares de mocasines y 7 pares de zapatillas y se vende a 360 euros. La oferta B consiste en 2 pares de botas y 2 pares de mocasines que vende a 120 euros. Se pide:

a.- *(8 puntos)* Plantea y resuelve un problema de programación lineal que permita calcular el número de lotes de cada oferta que maximiza el ingreso obtenido con la venta. ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?

b.- *(2 puntos)* Razona cuántos pares de botas, mocasines y zapatillas quedarán sin vender en la solución óptima.

a.- Llamamos x = número de ofertas A, y = número de ofertas B.

Completamos una tabla con los datos del problema.

	Nº de botas	Nº de mocasines	Nº de zapatillas	Ingresos
Nº ofertas A (x)	***x***	***3x***	***7x***	***360x***
Nº ofertas B (y)	***2y***	***2y***		***120y***
TOTALES	$x+2y$	$3x+2y$	$7x$	$360x+120y$

Queremos maximizar los ingresos: $I(x,y)=360x+120y$

Las restricciones son:

"*Un mayorista de zapatos pone a la venta su stock, en concreto, 800 pares de botas, 1.200 pares de mocasines y 2.100 pares de zapatillas*" → $x+2y\le 800;\ \ 3x+2y\le 1200;\ \ 7x\le 2100$

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ \ y\ge 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y\le 800 \\ 3x+2y\le 1200 \\ 7x\le 2100 \\ x\ge 0;\ \ y\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y\le 800 \\ 3x+2y\le 1200 \\ x\le 300 \\ x\ge 0;\ \ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

Representamos la región factible, empezando por dibujar las rectas que la delimitan.

$x+2y=800$

x	$y=\dfrac{800-x}{2}$
0	400
200	300

$3x+2y=1200$

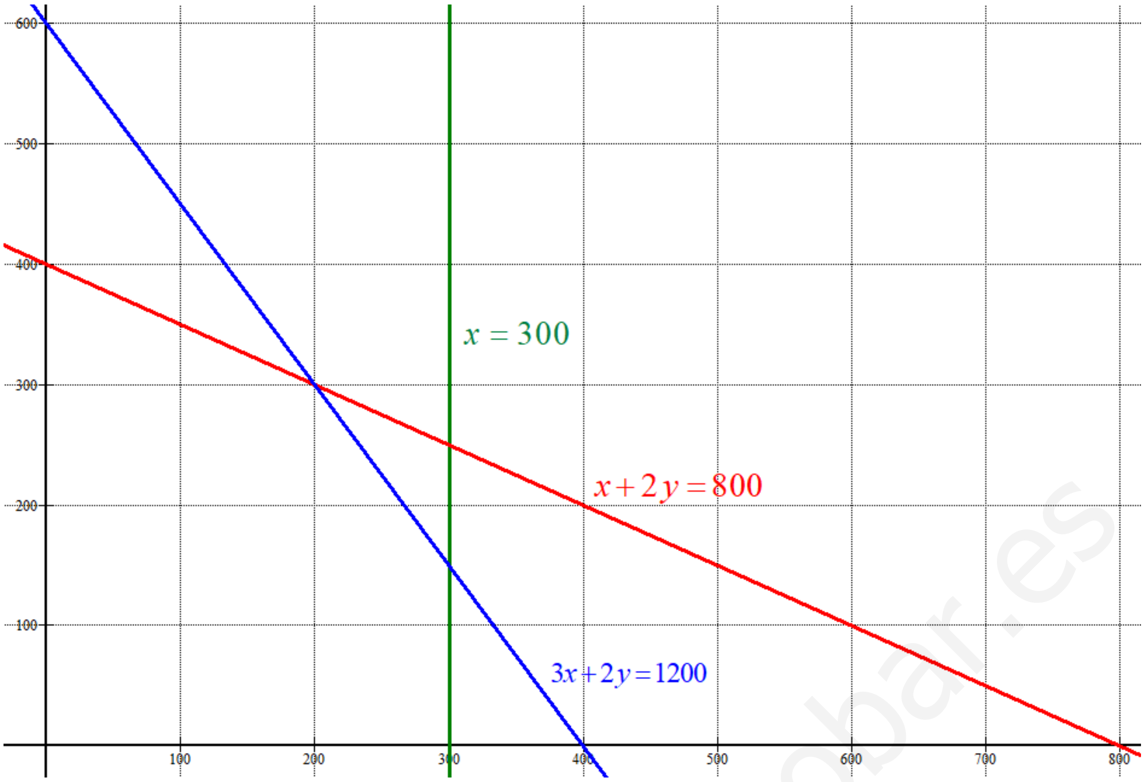
x	$y=\dfrac{1200-3x}{2}$
0	600
200	300

$x=300$

Recta vertical

$x\ge 0;\ \ y\ge 0$

Primer cuadrante



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+2y \leq 800 \\ 3x+2y \leq 1200 \\ x \leq 300 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas roja y azul y a la izquierda de la recta verde.

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.

Valoramos la función ingresos $I(x,y) = 360x + 120y$ en cada uno de sus vértices, en busca del valor máximo.

A(0, 0) → $I(0,0) = 0$
B(0, 400) → $I(0,400) = 0 + 48000 = 48000$
C(200, 300) → $I(200,300) = 72000 + 36000 = 108000$
D(300, 150) → $I(300,150) = 108000 + 18000 = 126000$
E(300, 0) → $I(300,0) = 108000 + 0 = 108000$

Los ingresos máximos son 126000 y se obtienen en D(300, 150).
Con la venta de 300 lotes de la oferta A y 150 lotes de la oferta B se cumplen las restricciones y se consiguen los máximos ingresos, siendo estos de 126000 €.

b.- En la solución óptima se venden 300 lotes de A y 150 de B lo que supone la venta de:

	Nº de botas	Nº de mocasines	Nº de zapatillas	Ingresos
Nº ofertas A ($x = 300$)	$\boldsymbol{x = 300}$	$\boldsymbol{3x = 900}$	$\boldsymbol{7x = 2100}$	$\boldsymbol{360x}$
Nº ofertas B ($y = 150$)	$\boldsymbol{2y = 300}$	$\boldsymbol{2y = 300}$		$\boldsymbol{120y}$
TOTALES	$x + 2y = 600$	$3x + 2y = 1200$	$7x = 2100$	$360x + 120y$

Se venden 600 pares de botas, por lo que quedan 800 – 600 = 200 pares de botas sin vender.
Se venden 1200 pares de mocasines, por lo que quedan 1200 – 1200 = 0 pares sin vender. Se venden todos los pares de mocasines.
Se venden 2100 pares de zapatillas, por lo que quedan 2100 – 2100 = 0 pares sin vender. Se venden todos los pares de zapatillas.

Solo quedan 200 pares de botas sin vender.

3.- (*10 puntos*) Un grupo de jóvenes emprendedores valoran abrir una empresa y, para ello, han encargado un estudio de mercado en el que estimaron que los beneficios para los próximos años, en cientos de miles de euros, vendrán dados por la función:

$$B(t)=\frac{2t-6}{t+4}$$

donde t representa los años transcurridos desde la apertura. Los emprendedores quieren saber:

a.- *(2 puntos)* ¿En qué intervalo la empresa tendrá pérdidas?

b.- *(4 puntos)* En qué momento $t \in [3,10]$ se alcanza el máximo beneficio y a cuántos euros asciende su valor. Justifica la respuesta.

c.- *(2 puntos)* ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para obtener un beneficio de 150.000 €?

d.- *(2 puntos)* En un horizonte infinito de tiempo, ¿existe límite para el beneficio? En caso afirmativo, ¿cuál es ese límite?

a.- Tener pérdidas significa que los beneficios son negativos.

Buscamos cuando la función $B(t)=\frac{2t-6}{t+4}$ es negativa

Como el valor de t es positivo entonces $t + 4 > 0$.

Para que sea negativo el cociente debe ser negativo el numerador.

$$2t-6<0 \Rightarrow 2t<6 \Rightarrow t<3 \Rightarrow 0 \le t<3$$

La empresa tiene pérdidas entre los años 0 y 3, durante los tres primeros años.

b.- Derivamos la función beneficios y buscamos el máximo.

$$B(t)=\frac{2t-6}{t+4} \Rightarrow B'(t)=\frac{2(t+4)-(2t-6)}{(t+4)^2}=\frac{2t+8-2t+6}{(t+4)^2}=\frac{14}{(t+4)^2}$$

Para cualquier valor de t la derivada es positiva, pues numerador es positivo, sin depender del valor de t y del denominador está elevado al cuadrado, por lo que siempre es positivo.

La función es creciente en el intervalo [3,10], por lo que el máximo beneficio lo alcanza en $t=10$.

Hallamos ese valor máximo: $B(10)=\frac{20-6}{10+4}=1$. El beneficio máximo en el intervalo [3,10] son 10000 € y se consigue en el décimo año.

c.- Buscamos t para que $B(t) = 1.5$.

$$B(t)=1.5 \Rightarrow \frac{2t-6}{t+4}=1.5 \Rightarrow 2t-6=1.5t+6 \Rightarrow 0.5t=12 \Rightarrow \boxed{t=\frac{12}{0.5}=24}$$

Se consigue un beneficio de 150000 € al cabo de 24 años.

d.- La función crece siempre, veamos su límite en el infinito.

$$\lim_{t\to+\infty} B(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{2t-6}{t+4}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{2t}{t}-\frac{6}{t}}{\frac{t}{t}+\frac{4}{t}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{2-\frac{6}{t}}{1+\frac{4}{t}}=\frac{2-\frac{6}{\infty}}{1+\frac{4}{\infty}}=\frac{2-0}{1+0}=\boxed{2}$$

Existe un límite para el aumento del beneficio. Ese límite son 200000 €.

4.- (*10 puntos*) Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{1-x} & si \quad x\le 0\\ bx^2+2x+c & si \quad x>0\end{cases}$$ donde a, b, c son parámetros reales. Se pide:

a.- *(5 puntos)* Determina los valores de los parámetros para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$, la función tenga un extremo relativo en $x = 1$ y $f'(-1) = -1$. Caracteriza si el extremo es máximo o mínimo.

b.- (*2 puntos)* Calcula, para los valores $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c.- *(3 puntos)* Calcula, para los valores $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$; $\int_1^2 f(x)dx$.

a.- Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$ debe cumplirse:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=\dfrac{a}{1-0}=a \\ \lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{a}{1-x}=a \\ \lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} bx^2+2x+c=c \\ \lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=f(1)\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{a=c}$$

Para que la función tenga un extremo relativo en $x = 1$ debe cumplirse que $f'(1) = 0$. Como en las proximidades de $x = 1$ la función es $f(x)=bx^2+2x+c$ tenemos que:

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=bx^2+2x+c\Rightarrow f'(x)=2bx+2 \\ f'(1)=0\end{array}\right\}\Rightarrow 0=2b+2\Rightarrow \boxed{b=-1}$$

Como en las proximidades de $x = -1$ la función es $f(x)=\dfrac{a}{1-x}$ para que $f'(-1) = -1$ debe cumplirse:

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=\dfrac{a}{1-x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{a}{(1-x)^2} \\ f'(-1)=-1\end{array}\right\}\Rightarrow \dfrac{a}{(1-(-1))^2}=-1\Rightarrow \dfrac{a}{4}=-1\Rightarrow \boxed{a=-4}$$

Por lo que $c = a = -4$.

Resumiendo: El valor de los parámetros es $a = -4$, $b = -1$, $c = -4$.

Comprobamos si el extremo relativo que hay en $x = 1$ es máximo o mínimo relativo. Para ello usamos la segunda derivada. Como la función es $f(x)=-x^2+2x-4$ tenemos que:

$$f(x)=-x^2+2x-4\Rightarrow f'(x)=-2x+2\Rightarrow f''(x)=-2\Rightarrow f''(1)=-2<0$$

La función presenta un máximo relativo en $x = 1$.

b.- Para los valores $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$ la función queda $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & si \quad x \leq 0 \\ -2x^2 + 2x + 3 & si \quad x > 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -2x^2 + 2x + 3 = \lim_{x \to +\infty} x^2\left(-2 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right) = (+\infty)(-2) = \boxed{-\infty}$$

c.- Para los valores $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$ la función queda $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & si \quad x \leq 0 \\ -2x^2 + 2x + 3 & si \quad x > 0 \end{cases}$

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 -2x^2 + 2x + 3dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 3x\right]_1^2 =$$

$$= \left[-\frac{2}{3} \cdot 2^3 + 2^2 + 3 \cdot 2\right] - \left[-\frac{2}{3} \cdot 1^3 + 1^2 + 3 \cdot 1\right] = -\frac{16}{3} + 4 + 6 + \frac{2}{3} - 1 - 3 = 6 - \frac{14}{3} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

5.- (*10 puntos*) Al terminar el bachillerato los 100 alumnos de un Centro, de las modalidades de *Ciencias* y *Artes*, planean viajar por Italia, Francia o Portugal. Entre los 55 alumnos de Ciencias se sabe que 10 quieren ir a Italia, 25 a Francia y 20 a Portugal. En el grupo de Artes hay 30 que quieren ir a Italia y 15 a Portugal. Elegido un alumno al azar, calcula:

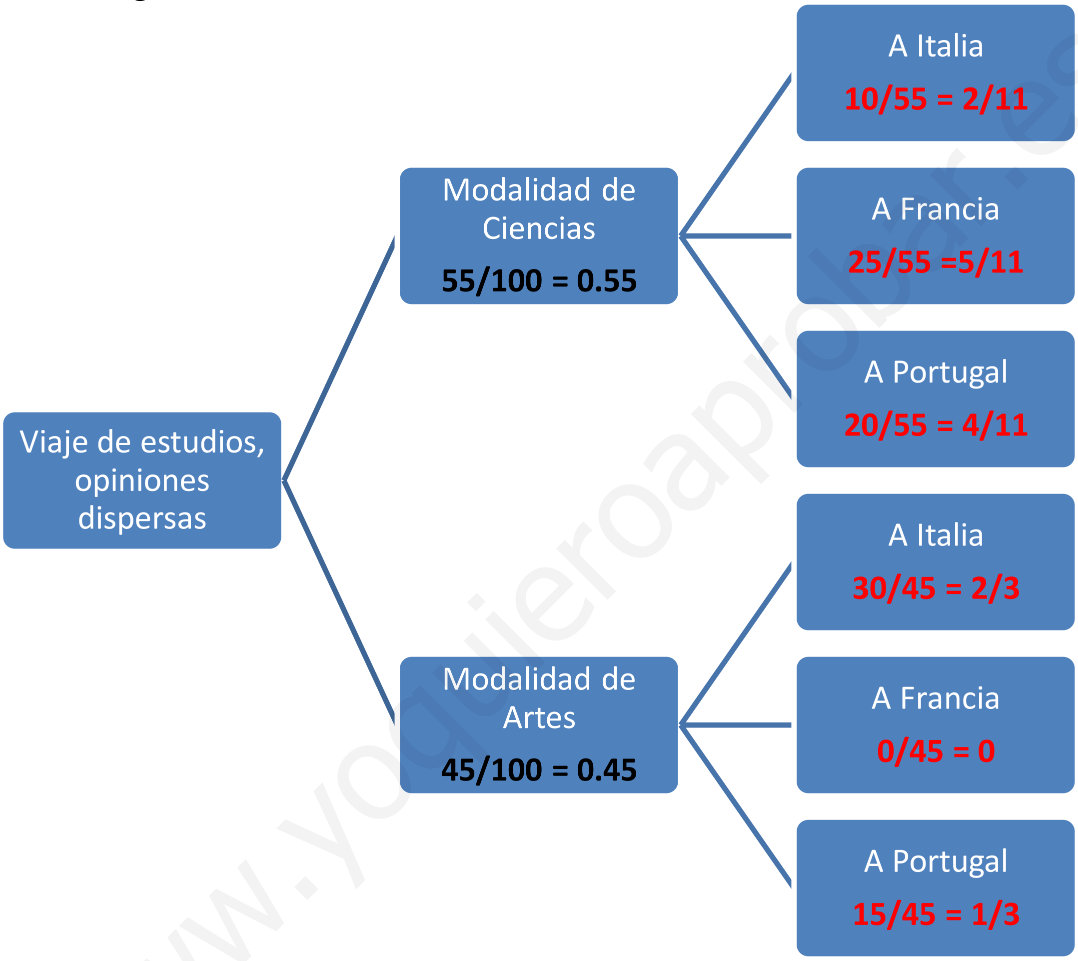
a.- *(2,5 puntos)* La probabilidad de que quiera ir a Portugal.

b.- *(2,5 puntos)* Probabilidad de que un alumno que quiera ir a Italia sea de Artes.

c.- *(2,5 puntos)* Probabilidad de que un alumno quiera ir a Francia y sea de Ciencias.

d.- *(2,5 puntos)* Probabilidad de que un alumno de Ciencias quiera ir a Francia.

Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos C = El alumno es de bachillerato de Ciencias, $\overline{C}$ = El alumno es de bachillerato de Artes. I = "Prefiere viajar a Italia", F = "Prefiere viajar a Francia", P = "Prefiere viajar a Portugal"

a.- Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(P) = P(C \cap P) + P(\overline{C} \cap P) =$$
$$= P(C)P(P/C) + P(\overline{C})P(P/\overline{C}) =$$
$$= 0.55 \cdot \frac{4}{11} + 0.45 \cdot \frac{1}{3} = \boxed{\frac{7}{20} = 0.35}$$

b.- Nos piden la probabilidad de que sea de Artes, sabiendo que quiere ir a Italia.

$$P\left(\overline{C}/I\right)=\frac{P\left(\overline{C}\cap I\right)}{P(I)}=\frac{P\left(\overline{C}\right)P\left(I/\overline{C}\right)}{P(C)P(I/C)+P\left(\overline{C}\right)P\left(I/\overline{C}\right)}=$$

$$=\frac{0.45\cdot\frac{2}{3}}{0.55\cdot\frac{2}{11}+0.45\cdot\frac{2}{3}}=\boxed{\frac{3}{4}=0.75}$$

c.-

$$P(F\cap C)=P(C)P(F/C)=0.55\cdot\frac{5}{11}=\boxed{\frac{1}{4}=0.25}$$

d.-

$$P(F/C)=\boxed{\frac{5}{11}\simeq 0.45}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

También se puede resolver con una tabla de contingencia y aplicar la regla de Laplace.

De los 100 alumnos, 55 son de ciencias y 45 de artes. 10 de ciencias quieren ir a Italia, 25 de ciencias quieren ir a Francia y 20 de ciencias quieren ir a Portugal. 30 de artes quieren ir a Italia, 0 de artes quieren ir a Francia y 15 de artes quieren ir a Portugal.
Lo resumimos todo en una tabla de contingencia.

	A Italia	A Francia	A Portugal	
Ciencias	**10**	**25**	**20**	**55**
Artes	**30**	**0**	**15**	**45**
	10+30 = 40	**25+0 = 25**	**20+15 = 35**	**100**

a.- $P(P)=\frac{n^{o}\,casos\ \ favorables\ a\ P}{n^{o}\,casos\ \ posibles}=\frac{35}{100}=\boxed{0.35}$

b.- $P\left(\overline{C}/I\right)=\frac{30}{40}=\boxed{\frac{3}{4}=0.75}$

c.- $P(F\cap C)=\frac{25}{100}=\boxed{0.25}$

d.- $P(F/C)=\frac{25}{55}=\boxed{\frac{5}{11}}$

6.- (*10 puntos*) Se quiere estimar el tiempo diario de conexión a redes sociales de los universitarios. Se sabe que dicho tiempo tiene una distribución normal con desviación típica de 33 minutos (0,55 horas). Se desea construir un intervalo de confianza para la media diaria de conexión a redes sociales. Se pide:

a.- *(6 puntos)* ¿A cuántos estudiantes debemos entrevistar para garantizar que el intervalo de confianza del 97% tenga una amplitud menor o igual a 0,16 horas?

b.- *(3 puntos)* Se ha encuestado a 100 universitarios y se ha obtenido una media de 4 horas al día. Calcula el intervalo de confianza al 97% para la media poblacional.

c.- *(1 punto)* Un informe de cierto Ministerio afirma que la media del tiempo que los universitarios pasan conectados a las redes sociales es de 5 horas al día. Razona, a la vista del apartado **b.-** si hay motivos para dudar de su afirmación.

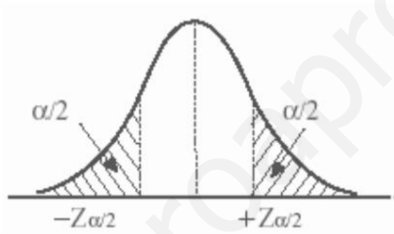
Sea X la variable aleatoria que da el tiempo diario (en horas) de conexión a redes sociales de un universitario.

Sabemos que sigue una N(**μ**, 0.55).

a.-

Para un nivel de confianza del 97%

$1 - \alpha = 0{,}97 \rightarrow \alpha = 0{,}03 \rightarrow \alpha/2 = 0'015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}17}$



El error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza → *Error = 0.08 horas*

Utilizamos la fórmula y tenemos

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.08 = 2.17 \cdot \frac{0.55}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.17 \cdot 0.55}{0.08}$$

$$n = (14.91875)^2 \simeq 222.569$$

El tamaño de la muestra debe ser al menos de 223 universitarios.

b.- n = 100. $\bar{x} = 4$.

Para un nivel de confianza del 97% tenemos que $z_{\alpha/2}$ **= 2,17.**

El error será:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{0.55}{\sqrt{100}} = 0.11935$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = (4 - 0.12, 4 + 0.12) = (3.88, 4.12)$$

c.- La media 5 no pertenece al intervalo de confianza anterior.

$5 \notin (3.88, 4.12)$ y el nivel de confianza es del 97%.

Por lo tanto es dudosa la afirmación del ministerio.