Septiembre 1994

OPCIÓN A.

1. *Considerar la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcular el rango de A. *(3 puntos)*

b) Discutir si existe solución y resolver, caso de que sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(3 puntos)

c) Cambiando una sola ecuación, convertir el sistema de ecuaciones lineales del apartado b en un sistema que tenga infinitas soluciones. Calcular dichas soluciones. *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Utilicemos las transformaciones elementales para conseguir una matriz triangular del mismo rango que la dada:

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 3$$

Transformaciones elementales realizadas: $F_2 - F_1$, $F_3 - F_1$

b)

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2y = 0 \\ -2z = 0 \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado y, como es homogéneo, su única solución es: $x = y = z = 0$

c) Basta con sustituir la tercera ecuación (por ejemplo) por una combinación lineal de las otras dos: $E_3 = E_1 + E_2$

En este caso, el sistema queda: $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2y = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\lambda \ , \ y = 0 \ , \ z = \lambda$

Transformaciones elementales: (1) $E_2 - E_1$, $E_3 - 2E_1$

2. *Sea f: / / / una función que cumple las siguientes condiciones:*

$i)\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 \qquad ii)\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1 \qquad iii)\ \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \qquad iv)\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \qquad v)\ f(0) = 0$

Se pide:

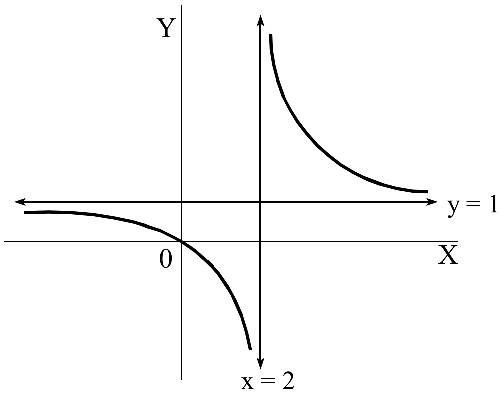
a) Dibujar la gráfica de una función f que verifique las cinco condiciones anteriores. (Razonar la gráfica dibujada). *(4 puntos)*

b) Dar la ecuación de la función representada en el apartado anterior. (Razonar la respuesta). *(2 puntos)*

c) Representar la gráfica de la función $g(x) = \dfrac{x}{x-2}$ *haciendo un estudio de su crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad.* *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.

a)



La gráfica cumple todas y cada una de las condiciones exigidas:

X tiene una asíntota horizontal de ecuación y = 1 como indican las dos primeras condiciones.
X tiene una asíntota vertical de ecuación x = 2como indican las condiciones tercera y cuarta.
X pasa por el origen de coordenadas como indica la quinta condición.

b) La ecuación es $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$ pues tiene una asíntota vertical de ecuación x = 2 (ya que $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\infty$), una asíntota horizontal de ecuación y = 1 (ya que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$) y pasa por el origen de coordenadas,

c) La gráfica es la del apartado a). Estudiemos su crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad:

$$g(x)=\frac{x}{x-2} \;\Rightarrow\; g'(x)=\frac{-2}{(x-2)^2} \;\Rightarrow\; g''(x)=\frac{4}{(x-2)^3}$$

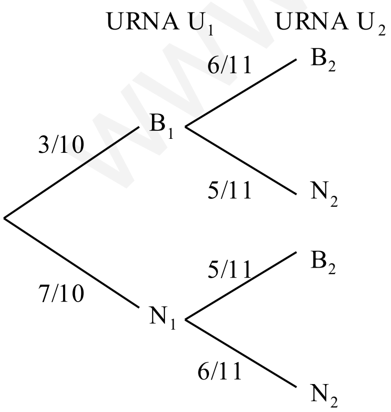
X Como g ´(x) < 0 □x $\Rightarrow$ g(x) es decreciente en todo su dominio
X g ´´(x) < 0 para x < 2 luego g(x) es convexa en $(-\infty, 2)$
g ´´(x) > 0 para x > 2 luego g(x) es cóncava en $(2, \infty)$

3. *Se tiene dos urnas U_1 y U_2, con bolas blancas y negras. La composición de las urnas es la siguiente: la U_1 contiene tres bolas blancas y siete negras, la U_2 contiene cinco blancas y cinco negras. Se saca una bola de la urna U_1 y se coloca en la U_2 , sin mirarla; luego se saca una bola de la urna U_2. Se pide:*

a) La probabilidad de que la bola que se saca de U_2 sea blanca. *(5 puntos)*
b) Sabiendo que la bola que se saca de la urna U_2 es blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la bola que se pasó de la urna U_1 a la U_2 fuera blanca? *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Construyamos el diagrama en árbol de la situación:



a) Es una aplicación del teorema de la probabilidad total:

$$p(B_2)=p(B_1)\cdot p(B_2/B_1)+p(N_1)\cdot p(B_2/N_1)=$$
$$=\frac{3}{10}\cdot\frac{6}{11}+\frac{7}{10}\cdot\frac{5}{11}=\frac{18}{110}+\frac{35}{110}=\frac{53}{110}\approx 0{,}48$$

b) Es una aplicación del teorema de Bayes:

$$p(B_1/B_2)=\frac{p(B_1)\cdot p(B_2/B_1)}{p(B_1)\cdot p(B_2/B_1)+p(N_1)\cdot p(B_2/\mathrm{N}_1)}=$$
$$=\frac{\frac{3}{10}\cdot\frac{6}{11}}{\frac{3}{10}\cdot\frac{6}{11}+\frac{7}{10}\cdot\frac{5}{11}}=\frac{\frac{18}{110}}{\frac{18}{110}+\frac{35}{110}}=\frac{\frac{18}{110}}{\frac{53}{110}}=\frac{18}{53}\approx 0{,}34$$

Septiembre 1994

OPCIÓN B.

1. *Un camión puede transportar como máximo 9 toneladas de mercancía por viaje. En un cierto viaje desea transportar al menos 4 toneladas de la mercancía A, y un peso de la mercancía B que no sea inferior a la mitad del peso que transporta de A. Sabiendo que se cobra 3000 pesetas por tonelada de A transportada y 2000 pesetas por tonelada de B, se quiere saber cuántas toneladas de A y B se deben cargar en el camión para obtener la ganancia máxima. Para ello se pide:*

a) Plantear el problema que se debe resolver (función objetivo y restricciones) *(5 puntos)*
b) Representar la región factible. *(2,5 puntos)*
c) Resolver el problema, explicando los pasos seguidos hasta obtener la solución. *(2,5 puntos)*

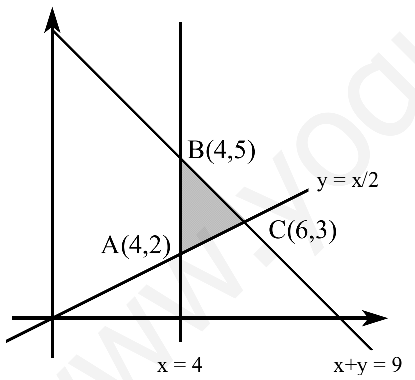
SOLUCIÓN.

Mercancía	Nº de toneladas	Ganancia
A	x	3000x
B	y	2000y
	$x \geq 0$ $x \geq 4$ $y \geq 0$ $y \geq \frac{x}{2}$ $x + y \leq 9$	F(x , y) = 3000x + 2000y

a) XFunción objetivo (máxima): F(x , y) = 3000x + 2000y

X Restricciones: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \geq 4 \\ y \geq \dfrac{x}{2} \\ x + y \leq 9 \end{cases}$

b)



Obtención de los vértices de la región factible:

Vértice A: $\begin{cases} x = 4 \\ y = \dfrac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow x = 4 \ , \ y = 2$

Vértice B: $\begin{cases} x = 4 \\ x + y = 9 \end{cases} \Rightarrow x = 4 \ , \ y = 5$

Vértice C: $\begin{cases} y = \dfrac{x}{2} \\ x + y = 9 \end{cases} \Rightarrow x = 6 \ , \ y = 3$

c) La solución está en alguno de los vértices de la región factible. Sustituyamos las coordenadas de cada vértice en la función objetivo y observemos el valor que tiene:

F(4 , 2) = 16 000 , F(4 , 5) = 22 000 , F(6 , 3) = 24 000 $\Rightarrow$ la máxima ganancia se obtendrá cargando 6 toneladas de A y 3 toneladas de B

2. *Dada la función* $y = x^3 + x$ *!2, se pide:*

a) Dar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. Razonar si existen máximos y mínimos, y en caso de que existan, calcularlos. *(3 puntos)*
b) Dar los intervalos de concavidad y convexidad de la función. Razonar si existen puntos de inflexión, y en caso de que existan, calcularlos. *(3 puntos)*
c) Representar la gráfica de la función. *(2 puntos)*
d) Dar la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa x = 0. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) El crecimiento y decrecimiento de la función dependen del signo de la primera derivada: $y' = 3x^2 + 1$

Puesto que $y' > 0 \ \forall x \Rightarrow$ la función es siempre creciente

No puede tener máximos ni mínimos porque $y' \neq 0$

b) La concavidad y la convexidad dependen del signo de la segunda derivada: $y'' = 6x$

Como $y'' < 0$ para $x < 0 \Rightarrow$ la función es convexa en $(-\infty, 0)$.

Como $y'' > 0$ para $x > 0 \Rightarrow$ la función es cóncava en $(0, \infty)$.

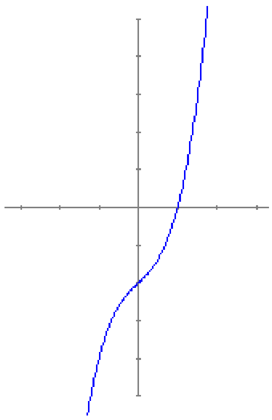
Los posibles puntos de inflexión son las soluciones de la ecuación $y'' = 0$. En este caso: $6x = 0 \Rightarrow x = 0$. Como $y''' = 6 \neq 0 \Rightarrow$ la función tiene un punto de inflexión en $(0, -2)$.

c) Las funciones polinómicas no tienen asíntotas. Además: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Calculemos los puntos de corte con los ejes: con OX: $\begin{cases} y = 0 \\ y = x^3 + x - 2 \end{cases} \Rightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 : \ (1, 0)$

con OY: $\begin{cases} x = 0 \\ y = x^3 + x - 2 \end{cases} \Rightarrow y = -2 : \ (0, -2)$

La gráfica será:



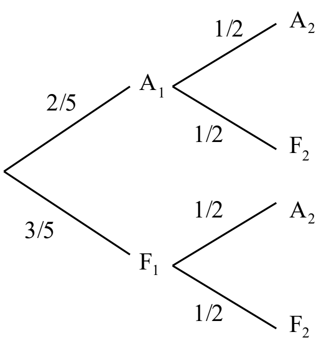
d) Ecuación de la recta tangente: $y - y_0 = m(x - x_0)$ donde: $m = f'(0) = 1$ y $(x_0, y_0) = (0, !2)$. Por tanto, la ecuación es: $y + 2 = x \Rightarrow y = x - 2$

3. *Dos tiradores disparan sobre una diana. Uno tiene dos aciertos cada cinco disparos y el otro un acierto cada dos disparos. Si los dos disparan al mismo tiempo, se pide contestar razonadamente a las siguientes preguntas:*

a) La probabilidad de que los dos acierten. *(2,5 puntos)*
b) La probabilidad de que alguno acierte. *(2,5 puntos)*
c) La probabilidad de que ninguno acierte. *(2,5 puntos)*
d) La probabilidad de que uno acierte y el otro no. *(2,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Construyamos el diagrama en árbol de la situación:



a) $p(A_1 \cap A_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

b) $1 - p(F_1 \cap F_2) = 1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

c) $p(F_1 \cap F_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}3$

d) $p = p(A_1 \cap F_2) + p(F_1 \cap A_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10} = 0{,}5$