

Junio 1996.

OPCIÓN A.

1. Un fabricante de alfombras dispone de las siguientes existencias de lana: 500 kg. de color azul, 400 kg. de color verde y 225 kg. de color rojo. Desea fabricar dos tipos de alfombras, A y B. Para fabricar una de tipo A se necesitan 1 kg. de lana azul y 2 kg. de lana verde y para fabricar una de tipo B, 2 kg. de lana azul, 1 kg. de lana verde y 1 kg. de lana roja. Cada alfombra de tipo A se vende por 2.000 pesetas y cada una de tipo B por 3.000 pesetas. Se supone que se vende todo lo que se fabrica. Se pide:

a) ¿Cuántas alfombras de cada tipo se han de fabricar para que el beneficio sea máximo?, ¿cuál es ese beneficio máximo?. Explicar los pasos seguidos para obtener la solución. (8 puntos)

b) ¿Qué cantidad de lana de cada color quedará cuando se fabrique el número de alfombras que proporciona el máximo beneficio? (2 puntos)

SOLUCIÓN.

Es un problema de Programación Lineal. Debemos construir la función objetivo y las restricciones a que está sometida. Elaboremos una tabla con lo datos y condiciones expresados en el enunciado:

Tipo	número	Lana azul	Lana verde	Lana roja	Beneficio
A	x	x	2x	0x	2000x
B	y	2y	y	y	3000y
	$x \geq 0 ; y \geq 0$	≤ 500	≤ 400	≤ 225	$f(x, y)$

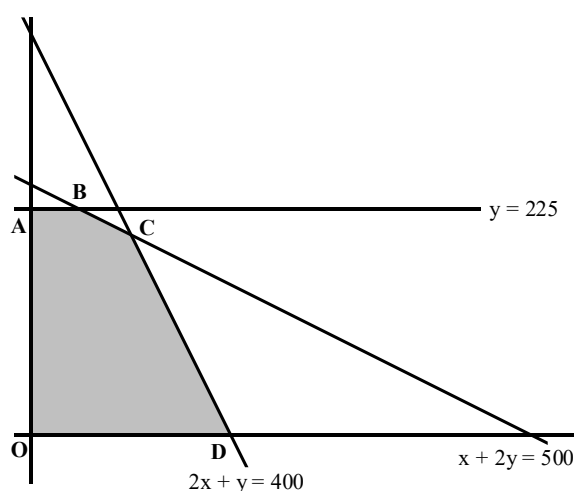
• Función objetivo (maximizar): $f(x, y) = 2000x + 3000y$

• Restricciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 500 \\ 2x + y \leq 400 \\ y \leq 225 \end{cases}$$

Construyamos la región factible que es la solución del conjunto de restricciones:

- La recta $x = 0$ es el eje de ordenadas y la inecuación $x \geq 0$ tiene como solución el semiplano de la derecha.
- La recta $y = 0$ es el eje de abscisas y la inecuación $y \geq 0$ tiene como solución el semiplano superior.
- La recta $x + 2y = 500$ pasa por los puntos $(500, 0)$ y $(0, 250)$ (por ejemplo) y la solución de la inecuación $x + 2y \leq 500$ es el semiplano al que pertenece el origen.
- La recta $2x + y = 400$ pasa por los puntos $(200, 0)$ y $(0, 400)$ (por ejemplo) y la solución de la inecuación $2x + y \leq 400$ es el semiplano al que pertenece el origen.
- La recta $y = 225$ es paralela al eje de abscisas y la solución de $y \leq 225$ es el semiplano inferior.



La función objetivo se maximiza en alguno de los vértices de la región factible. Calculemos las coordenadas de dichos vértices y el valor que tiene la función objetivo en los mismos:

Vértice O: $O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 0$

Vértice A: $A(0, 225) \Rightarrow f(0, 225) = 3000 \cdot 225 = 675000$

$$\text{Vértice B: } \begin{cases} x+2y=500 \\ y=225 \end{cases} \Rightarrow B(50, 225) \Rightarrow f(50, 225) = 2000 \cdot 50 + 3000 \cdot 225 = 775000$$

$$\text{Vértice C: } \begin{cases} x+2y=500 \\ 2x+y=400 \end{cases} \Rightarrow C(100, 200) \Rightarrow f(100, 200) = 2000 \cdot 100 + 3000 \cdot 200 = 800000$$

$$\text{Vértice D: } \begin{cases} y=0 \\ 2x+y=400 \end{cases} \Rightarrow D(200, 0) \Rightarrow f(200, 0) = 2000 \cdot 200 = 400000$$

Por tanto, la función objetivo se maximiza en el vértice C. Interesa fabricar 100 alfombras del tipo A y 200 del tipo B.

- b) La lana de cada color que se gasta es: Azul: $100 + 400 = 500 \text{ kg} \Rightarrow$ no sobra.
Verde: $200 + 200 = 400 \text{ kg} \Rightarrow$ no sobra.
Roja: $0 + 200 = 200 \text{ kg} \Rightarrow$ sobran 25 kg.

2. a) Encontrar un número tal que al restarle su cuadrado la diferencia sea máxima. Razonar la respuesta. (5 puntos)
b) Calcular el área del recinto plano limitado por las gráficas de $y = x^2 - 9$, $y = 7$. (5 puntos)

SOLUCIÓN.

a) Sea x el número buscado. La función que debe ser máxima es: $f(x) = x - x^2$. Estudiemos para qué valor de x la función alcanza su máximo: $f'(x) = 1 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$. Como $f''(x) = -2 < 0 \Rightarrow f(x)$ es máxima en $x = \frac{1}{2}$.

El número buscado es pues $x = \frac{1}{2}$.

b) Escribamos la función diferencia de las dos funciones dadas: $f(x) = x^2 - 9 - 7 = x^2 - 16$.

Los puntos de corte de esta función con el eje OX (límites de integración) son: $x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x = -4$, $x = 4$.

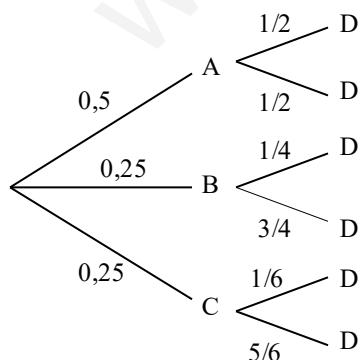
Por tanto:

$$\int_{-4}^4 (x^2 - 16) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 16x \right]_{-4}^4 = \left(\frac{64}{3} - 64 \right) - \left(-\frac{64}{3} + 64 \right) = \frac{64}{3} - 64 + \frac{64}{3} - 64 = \frac{128}{3} - 128 = -\frac{256}{3} \Rightarrow S = \frac{256}{3} u^2$$

3. Una fábrica de coches tiene tres cadenas de producción A, B y C. La cadena A fabrica el 50% del total de coches producidos, la B el 25% y la C el resto. La probabilidad de que un coche resulte defectuoso es en la cadena A de $1/2$, en la B de $1/4$ y en la C de $1/6$. Calcular razonadamente:

- a) La probabilidad de que un coche sea defectuoso y haya sido fabricado por la cadena A. (2 puntos)
b) La probabilidad de que un coche sea defectuoso. (4 puntos)
c) Si un coche no es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producido por la cadena C? (4 puntos)

SOLUCIÓN.



$$\text{a) } p(D \cap A) = p(A) \cdot p(D|A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0,25$$

b) Aplicación del teorema de la probabilidad total:

$$p(D) = p(A) \cdot p(D|A) + p(B) \cdot p(D|B) + p(C) \cdot p(D|C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{24} = \frac{12}{48} + \frac{3}{48} + \frac{2}{48} = \frac{17}{48} \cong 0,35$$

c) Aplicación del teorema de Bayes:

$$p(C|\bar{D}) = \frac{p(C) \cdot p(\bar{D}|C)}{p(A) \cdot p(\bar{D}|A) + p(B) \cdot p(\bar{D}|B) + p(C) \cdot p(\bar{D}|C)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{6}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{6}} = \frac{\frac{5}{24}}{\frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{5}{24}} = \frac{10}{31} \cong 0,32$$

Junio 1996.

OPCIÓN B.

1. Tres personas A, B y C le van a hacer un regalo a un amigo común. El regalo les cuesta 8.600 pesetas. Como no todos disponen del mismo dinero deciden pagar de la siguiente manera: A paga el triple de lo que pagan B y C juntos, y por cada 2 pesetas que paga B, C paga 3 pesetas. Se pide:

- a) Plantear un sistema de ecuaciones lineales que permita determinar cuánto paga cada persona. (5 puntos)
b) Resolver el sistema planteado en el apartado anterior por el método de Gauss. (5 puntos)

SOLUCIÓN.

$$a) \begin{cases} A + B + C = 8600 \\ A = 3 \cdot (B + C) \\ \frac{B}{C} = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B + C = 8600 \\ A - 3B - 3C = 0 \\ 3B - 2C = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} A + B + C = 8600 \\ A - 3B - 3C = 0 \\ 3B - 2C = 0 \end{cases} \xrightarrow{(1)} \begin{cases} A + B + C = 8600 \\ 3B - 2C = 0 \\ A - 3B - 3C = 0 \end{cases} \xrightarrow{(2)} \begin{cases} A + B + C = 8600 \\ 3B - 2C = 0 \\ -4B - 4C = -8600 \end{cases} \xrightarrow{(3)} \begin{cases} A + B + C = 8600 \\ 3B - 2C = 0 \\ -20C = -25800 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = 1290, B = 860, A = 6450$$

Transformaciones elementales: (1) Cambio de orden de las ecuaciones
(2) $E_3 - E_1$
(3) $(3) \cdot 3E_3 + 4E_2$

es decir: A paga 6450 ptas., B paga 860 ptas. y C paga 1290 ptas.

2. El coste total de fabricación de q unidades de un cierto artículo es $C(q) = 3q^2 + 5q + 75$ dólares. Se define coste medio por unidad como el cociente $C(q)/q$. Se pide:

- a) ¿En qué nivel de producción será menor el coste medio por unidad?. Razonar la respuesta. (7 puntos)
b) ¿Tiene la función coste medio por unidad puntos de inflexión?. Razonar la respuesta. (3 puntos)

SOLUCIÓN.

a) La función "coste medio por unidad" es: $f(q) = \frac{3q^2 + 5q + 75}{q}$. Veamos para qué valor de q alcanza su mínimo:

$$f'(q) = \frac{(6q + 5) \cdot q - (3q^2 + 5q + 75)}{q^2} = \frac{3q^2 - 75}{q^2} = 0 \Rightarrow 3q^2 - 75 = 0 \Rightarrow q = \pm 5 \text{ (puntos críticos)}$$

$$f''(q) = \frac{6q \cdot q^2 - (3q^2 - 75) \cdot 2q}{q^4} = \frac{150}{q^3} \Rightarrow \begin{cases} f''(5) > 0 \Rightarrow \text{mínimo} \\ f''(-5) < 0 \Rightarrow \text{máximo} \end{cases} \text{ luego el coste medio por unidad es mínimo}$$

para una producción de $q = 5$.

b) La función no tiene puntos de inflexión porque $f''(q) \neq 0 \quad \forall q$

3. Se sabe que la desviación típica del peso de los individuos de una cierta población es de 6 Kg. Calcula el tamaño de la muestra que se ha de considerar para, con un nivel de confianza del 95%, estimar el peso medio de los individuos de la población con un error inferior a 1 Kg. Explica los pasos seguidos para obtener la respuesta. (10 puntos)

SOLUCIÓN.

La desviación típica poblacional es $\sigma = 6 \text{ kg}$

Para un nivel de confianza del 95%, el valor crítico $z_{\alpha/2} = 1,96$

El error máximo admisible es $E = 1 \text{ kg}$: $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \frac{z_{\alpha/2}^2 \cdot \sigma^2}{E^2} = \frac{1,96^2 \cdot 6^2}{1^2} = 138,3$ luego el tamaño de la muestra debe ser de 139 individuos como mínimo.