Junio 2000.

OPCIÓN A.

1. *Sea la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & b^2 \end{pmatrix}$, *con b un parámetro real. Se pide:*

a) ¿Para qué valores del parámetro b el sistema de ecuaciones lineales $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *tiene sólo la solución x = y = z = 0?. Justificar la respuesta.* *(5 puntos)*

b) Para b = !1, resolver, si es posible, el sistema de ecuaciones lineales $A\begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Puesto que se trata de un sistema homogéneo, el rango de la matriz de los coeficientes es igual al de la ampliada. El sistema tiene sólo la solución trivial si el rango coincide con el número de incógnitas, es decir si rg A = 3.

$$rg\ A = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & b^2 \end{pmatrix} \overset{(1)}{=} rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & b^2-1 \end{pmatrix}$$ luego para que el rango sea 3, debe ser $b^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow b \neq \pm 1$

Transformaciones elementales: (1) $F_2 - 2F_1$, $F_3 - F_1$

b) El sistema es: $\begin{cases} x+z=1 \\ 2x+y+z=1 \\ x+z=1 \end{cases} \underset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+z=1 \\ y-z=-1 \\ 0z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=\lambda-1 \\ z=\lambda \end{cases}$ Transformaciones elementales: (1) $E_2 - 2E_1$, $E_3 - E_1$

2. *Considerar la función polinómica de tercer grado* $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *, siendo a, b, c y d parámetros reales. Se pide:*

a) Determinar los valores de los parámetros para que f(x) tenga un máximo en el punto (0 , 4) y un mínimo en el punto (2 , 0). *(7 puntos)*
b) Para a = b = c = d = 1, razonar si f(x) tiene puntos de inflexión y, en caso afirmativo, calcularlos. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Si f(x) tiene un máximo en el punto (0 , 4), debe ser: $f(0) = 4$, $f\,'(0) = 0$ y si tiene un mínimo en (2 , 0), debe ser: $f(2) = 0$, $f\,'(2) = 0$:

Como f´(x) = $3ax^2 + 2bx + c$, exigiendo que se cumplan las cuatro condiciones anteriores:

$$\begin{cases} f(0)=4 \\ f\,'(0)=0 \\ f(2)=0 \\ f\,'(2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=4 \\ c=0 \\ 8a+4b+4=0 \\ 12a+4b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=-1 \\ 3a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \end{cases}$$ es decir: a = 1 , b = !3 , c = 0 , d = 4

b) La función es f(x) = $x^3 + x^2 + x + 1$.

Un punto de inflexión cumple que f´´(x) = 0 y f´´´(x) □ 0.

Se tiene: $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x + 2 \Rightarrow f'''(x) = 6$.

Los posibles puntos de inflexión anulan a la segunda derivada: $6x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{3}$ y como $f'''(x) = 6 \neq 0$ la función tiene un punto de inflexión en $x = -\dfrac{1}{3}$: $\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{20}{27}\right)$

3. *De una baraja española de 40 cartas se extraen sucesivamente y sin reposición dos cartas. Se pide calcular la probabilidad de que:*

a) La primera carta sea de copas y la segunda de espadas. *(2,5 puntos)*
b) Una carta sea de copas y la otra de espadas. *(2,5 puntos)*
c) Ninguna sea de bastos. *(2,5 puntos)*
d) Las dos sean de oros. *(2,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $p\left(C_1 \cap E_2\right) = p\left(C_1\right) \cdot p\left(E_2 / C_1\right) = \dfrac{10}{40} \cdot \dfrac{10}{39} = \dfrac{100}{1560} = 0{,}064$

b) $p\left[\left(C_1 \cap E_2\right) \cup \left(E_1 \cap C_2\right)\right] = p\left(C_1 \cap E_2\right) + p\left(E_1 \cap C_2\right) = \dfrac{10}{40} \cdot \dfrac{10}{39} + \dfrac{10}{40} \cdot \dfrac{10}{39} = \dfrac{200}{1560} = 0{,}128$

c) $p\left(\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2\right) = p\left(\overline{B}_1\right) \cdot p\left(\overline{B}_2 / \overline{B}_1\right) = \dfrac{30}{40} \cdot \dfrac{29}{39} = \dfrac{870}{1560} = 0{,}5577$

d) $p\left(O_1 \cap O_2\right) = p\left(O_1\right) \cdot p\left(O_2 / O_1\right) = \dfrac{10}{40} \cdot \dfrac{9}{39}$

Junio 2000.

OPCIÓN B.

1. *Un colegio prepara una excursión a la montaña para 114 alumnos. Para ello dispone de 8 vehículos de 6 plazas cada uno y otros 8 de 15 plazas, pero para el día de la excursión sólo dispone de 10 conductores. El viaje de ida y vuelta con un vehículo de 6 plazas cuesta 800 pesetas y con uno de 15 plazas 2100 pesetas. Calcular cuántos vehículos de cada tipo debe utilizar el colegio para que el coste del transporte sea mínimo. Explicar los pasos seguidos para obtener la solución.* *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.

Elaboremos una tabla con todos los datos y condiciones:

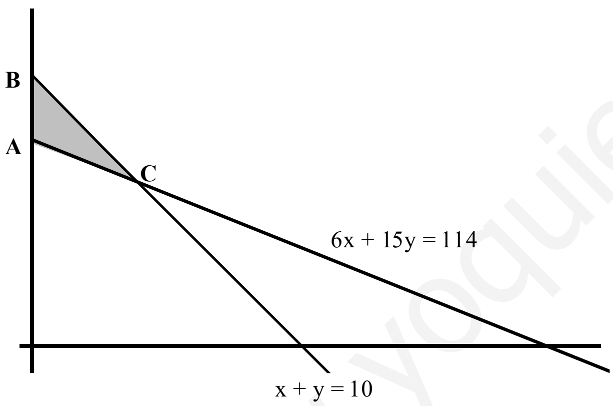
Tipo	Número	Nº viajeros	Nº conduct.	Coste
6 plazas	x	6x	x	800x
15 plazas	y	15y	y	2100y
	$x \geq 0$; $y \geq 0$	≥ 114	≤ 10	$f(x, y)$

- La función objetivo (mínima) es:

$$f(x, y) = 800x + 2100y$$

- Las restricciones son: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 6x + 15y \geq 114 \\ x + y \leq 10 \end{cases}$

Resolvamos el sistema de restricciones para dibujar la región factible:



- La recta x = 0 es el eje de ordenadas y la solución de la inecuación $x \geq 0$ es el semiplano derecho.
- La recta y = 0 es el eje de abscisas y la solución de la inecuación $y \geq 0$ es el semiplano superior.
- La recta $6x + 15y = 114$ pasa por los puntos $(19, 0)$ y $(4, 6)$ (por ejemplo) y la solución de la inecuación $6x + 15y \geq 114$ es el semiplano en el que no está el origen de coordenadas.
- La recta x + y = 10 pasa por los puntos $(10, 0)$ y (por ejemplo) y la solución de la inecuación $x + y \leq 10$ es el semiplano en el que está el origen de coordenadas.

La región factible es la sombreada en gris.

La función objetivo alcanza su mínimo en alguno de los vértices de la región factible. Calculemos las coordenadas de dichos vértices y el valor que toma la función objetivo en cada uno de ellos:

Vértice A: $\begin{cases} x = 0 \\ 6x + 15y = 114 \end{cases} \Rightarrow A\left(0, \frac{38}{5}\right) \Rightarrow f\left(0, \frac{38}{5}\right) = 2100 \cdot \frac{38}{5} = 15960 \text{ pts}$

Vértice B: $\begin{cases} x = 0 \\ x + y = 10 \end{cases} \Rightarrow B(0, 10) \Rightarrow f(0, 10) = 21000 \text{ pts}$

Vértice C: $\begin{cases} x + y = 10 \\ 6x + 15y = 114 \end{cases} \Rightarrow C(4, 6) \Rightarrow f(4, 6) = 800 \cdot 4 + 2100 \cdot 6 = 15800 \text{ pts}$

Luego la combinación más barata es la de utilizar cuatro vehículos de 6 plazas y seis de 15 plazas.

2. *a) Determinar el área limitada entre las parábolas* $y = x^2 - 4$, $y = 4 - x^2$. *(5 puntos)*

b) Determinar una función f(x) que verifica: $f'(x) + x^3 - 3 = 0$, $f(1) = \dfrac{3}{4}$ *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Escribamos la función diferencia de las dadas: $f(x) = 2x^2 - 8$

Calculemos sus puntos de corte con OX (límites de integración): $2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow$ x = −2 , x = 2

Se tiene:

$$\int_{-2}^{2} \left(2x^2 - 8\right)dx = \left[\frac{2x^3}{3} - 8x\right]_{-2}^{2} = \left(\frac{16}{3} - 16\right) - \left(\frac{-16}{3} + 16\right) = \frac{16}{3} - 16 + \frac{16}{3} - 16 = -\frac{64}{3} \Rightarrow S = \left|-\frac{64}{3}\right| = \frac{64}{3}u^2$$

b) De la primera condición se tiene: $f'(x) = -x^3 + 3 \Rightarrow f(x) = \int \left(-x^3 + 3\right)dx = -\dfrac{x^4}{4} + 3x + k$

y utilizando la segunda condición: $f(1) = \dfrac{3}{4} \Rightarrow -\dfrac{1}{4} + 3 + k = \dfrac{3}{4} \Rightarrow k = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} - 3 = -2$

luego: $f(x) = -\dfrac{1}{4}x^4 + 3x - 2$

3. *La cuarta parte de una población ha sido vacunada contra una enfermedad. ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener una muestra de dicha población para que, con un nivel de confianza del 95%, la proporción muestral y la poblacional no difieran en más de 0,02?. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta.* *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.

La proporción poblacional de vacunados es: $pr = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$ y la de no vacunados: $1 - pr = 0{,}75$

Para un nivel de confianza del 95%, el valor crítico es: $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

El error máximo admisible es: E = 0,02.

En estas condiciones: $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\dfrac{pr \cdot (1 - pr)}{n}} \Rightarrow n = \dfrac{z_{\alpha/2}^2 \cdot pr \cdot (1 - pr)}{E^2} = \dfrac{1{,}96^2 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}{0{,}02^2} = 1800{,}75$

es decir, el tamaño mínimo de la muestra debe ser de 1801 personas.