Junio 2001.

OPCIÓN A.

1. *El tratamiento de cierta enfermedad requiere la administración de dos complejos vitamínicos, C_1 y C_2. Cada semana es preciso consumir al menos 450 mg de C_1 y 200 mg de C_2. Estos complejos se presentan en dos comprimidos diferentes: el comprimido de color rojo que cuesta 25 pesetas la unidad y que contiene 15 mg de C_1 y 25 mg de C_2 y el comprimido de color azul que también cuesta 25 pesetas la unidad y que contiene 28 mg de C_1 y 10 mg de C_2. ¿Cuántos comprimidos de cada color debe tomar un individuo en una semana para que el coste del tratamiento sea mínimo?. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta.* *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.

Se trata de un problema de Programación Lineal. Escribamos la función objetivo y las restricciones:

Comprimidos	**nº**	**C_1 (cantidad)**	**C_2 (cantidad)**	**Coste**
R (rojo)	x	15x	25x	25x
A (azul)	y	28y	10y	25y
	$x \geq 0$; $y \geq 0$	≥ 450	≥ 200	F(x , y)

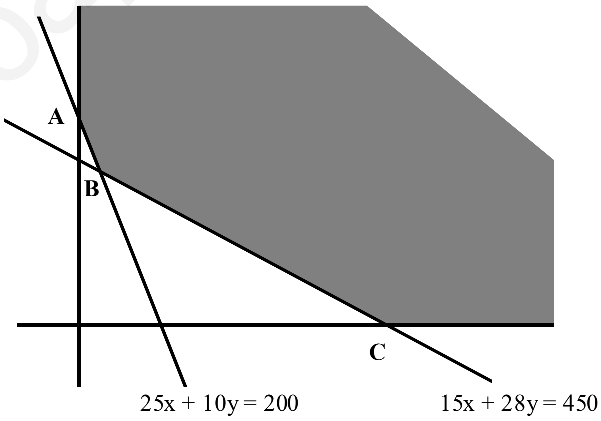
• Función objetivo (mínima):
F(x , y) = 25x + 25y

• Restricciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 15x + 28y \geq 450 \\ 25x + 10y \geq 200 \end{cases}$$

Construyamos la región factible (solución del sistema de restricciones):

• La recta x = 0 es el eje de ordenadas. $x \geq 0$ es el semiplano formado por los puntos de abscisa positiva.
• La recta y = 0 es el eje de abscisas. $y \geq 0$ es el semiplano formado por los puntos de ordenada positiva.
• La recta $15x + 28y = 450$ pasa por los puntos (30 , 0) y (2 , 15) (por ejemplo). La inecuación $15x + 28y \geq 450$ es el semiplano del que no forma parte el origen de coordenadas (0 , 0).
• La recta $25x + 10y = 200$ pasa por los puntos(0 , 20) y (2 , 15) (por ejemplo). La inecuación $25x + 10y \geq 200$ es el semiplano del que no forma parte el origen de coordenadas (0 , 0).



La región factible es la zona en gris.

La solución del problema está en alguno de los vértices de la región factible. Calculemos sus coordenadas:

Vértice A: $\begin{cases} x = 0 \\ 25x + 10y = 200 \end{cases} \Rightarrow A(0, 20)$

Vértice B: $\begin{cases} 25x + 10y = 200 \\ 15x + 28y = 450 \end{cases} \Rightarrow B(2, 15)$

Vértice C: $\begin{cases} y = 0 \\ 15x + 28y = 450 \end{cases} \Rightarrow C(30, 0)$

Calculemos el valor de la función objetivo en cada vértice: F(0 , 20) = 500 , F(2 , 15) = 425 , F(30 , 0) = 750

luego el coste es mínimo utilizando 2 comprimidos rojos y 15 comprimidos azules.

2. *Sea una función f(x) tal que su primera derivada es f'(x) = 4x + b, con b un parámetro real. Se pide:*

a) Determinar el valor del parámetro b para que f(x) tenga un mínimo en x = 1. *(3 puntos)*
b) ¿Puede tener f(x) un máximo en x = -1?. Razonar la respuesta. *(2 puntos)*
c) Determinar el valor del parámetro b para que 0 y -1 sean raíces de f(x). *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Si f(x) tiene un mínimo en x = 1, debe ser $f'(1) = 0 \;\Rightarrow\; 4 + b = 0 \;\Rightarrow\; b = -4$

b) No. Al ser f´(x) una función polinómica de primer grado, sólo puede tener un punto crítico que corresponde al mínimo en x = -1.

c) Calculemos la función f(x): $f(x) = \int f'(x)\, d(x) = \int (4x + b)\, dx = 2x^2 + bx + k$

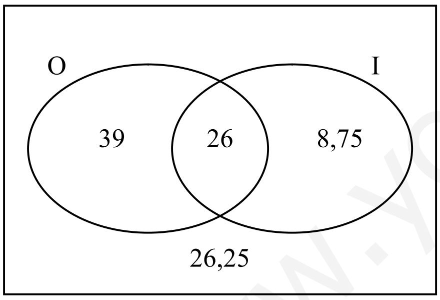
Si x = 0 y x = -1 son raíces de f(x), debe ocurrir que:
$$\begin{aligned} &f(0) = 0 \;\Rightarrow\; k = 0 \\ &f(-1) = 0 \;\Rightarrow\; 2 - b = 0 \;\Rightarrow\; b = 2 \end{aligned}$$

3. *En una empresa, el 65% de sus empleados saben manejar un ordenador y de éstos, el 40% hablan inglés. La cuarta parte de los que no saben manejar el ordenador hablan inglés. Calcular la probabilidad de que elegido al azar un empleado de esta empresa:*

a) Hable inglés y maneje el ordenador. *(3 puntos)*
b) Hable inglés. *(3,5 puntos)*
c) Maneje el ordenador, sabiendo que habla inglés. *(3,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Si suponemos un total de 100 empleados, la distribución de los mismos según el manejo del ordenador y del inglés es:

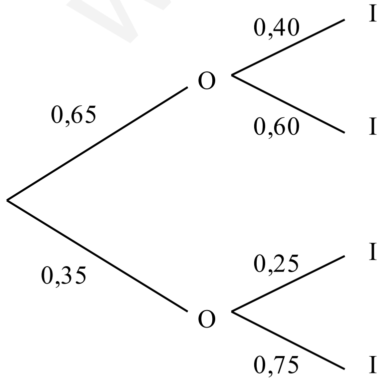


a) $p(I \cap O) = \dfrac{26}{100} = 0{,}26$

b) $p(I) = \dfrac{26 + 8{,}75}{100} = \dfrac{34{,}75}{100} = 0{,}3475$

c) $p(0/I) = \dfrac{26}{34{,}75} = 0{,}7482$

- También puede resolverse organizando el diagrama en árbol de la situación:



a) $p(I \cap O) = 0{,}65 \cdot 0{,}40 = 0{,}26$

b) Aplicación del teorema de la probabilidad total:

$$p(I) = 0{,}65 \cdot 0{,}40 + 0{,}35 \cdot 0{,}25 = 0{,}3475$$

c) Aplicación del teorema de Bayes:

$$p(O/I) = \frac{p(O) \cdot p(I/O)}{p(O) \cdot p(I/O) + p(\overline{O}) \cdot p(I/\overline{O})} =$$

$$= \frac{0{,}65 \cdot 0{,}40}{0{,}65 \cdot 0{,}40 + 0{,}35 \cdot 0{,}25} = 0{,}7482$$

Junio 2001.

OPCIÓN B.

1. *En una librería hubo la semana pasada una promoción de tres libros: una novela, un libro de poesía y un cuento. Se vendieron 200 ejemplares de la novela, 100 de poesía y 150 cuentos. Sabiendo que la librería ingresó por dicha promoción 8.600 euros, que el precio de un ejemplar de novela es el doble que el de un cuento y que el triple de la diferencia entre el precio del ejemplar de poesía y del cuento es igual al precio de una novela, se pide:*

a) Plantear un sistema de ecuaciones lineales para determinar el precio al que se vendió cada libro. *(5 puntos)*
b) Resolver el sistema de ecuaciones planteado por el método de Gauss. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Sean: precio novela = x , precio poesía = y , precio cuento = z

Se tiene: $\begin{cases} 200x+100y+150z=8600 \\ x=2z \\ x=3(y-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 200x+100y+150z=8600 \\ x-2z=0 \\ x-3y+3z=0 \end{cases}$

b) Utilicemos las transformaciones elementales para conseguir un sistema escalonado equivalente:

$$\begin{cases} 200x+100y+150z=8600 \\ x-2z=0 \\ x-3y+3z=0 \end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-3y+3z=0 \\ x-2z=0 \\ 4x+2y+3z=172 \end{cases} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-3y+3z=0 \\ 3y-5z=0 \\ 14y-9z=172 \end{cases} \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-3y+3z=0 \\ 3y-5z=0 \\ 43z=516 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad z=12 \ , \ y=20 \ , \ x=24$

Transformaciones elementales: (1) $E_1/50$, cambio de orden de las ecuaciones
(2) E_2-E_1 , E_3-4E_1
(3) $3E_3-14E_2$

luego la novela se vendió a 24 €, la poesía a 20 € y el cuento a 12 €.

2. *Dada la función* $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-25}{x-5} & \text{si } x \neq 5 \\ 0 & \text{si } x=5 \end{cases}$ *, se pide:*

a) Demostrar que f(x) no es continua en x = 5. *(3 puntos)*
b) ¿Existe una función continua que coincida con f(x) para todos los valores $x \neq 5$ *?. En caso afirmativo, dar su expresión.* *(3 puntos)*
c) ¿Existe alguna asíntota oblicua de f(x)?. En caso afirmativo, calcularla. *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Apliquemos la definición de continuidad en un punto:

i) $\exists f(5)=0$

ii) $\exists \lim_{x\to 5} f(x) = \lim_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5} = \dfrac{0}{0} = \lim_{x\to 5}\dfrac{(x+5)\cdot(x-5)}{x-5} = \lim_{x\to 5}(x+5)=10$

iii) $f(5) \neq \lim_{x\to 5} f(x)$

Falla la tercera condición, luego la función es discontinua en x =5 (discontinuidad evitable)

b) Sí, basta con conseguir que $f(5) = \lim_{x \to 5} f(x)$: $\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5} & \text{si } x \neq 5 \\ 10 & \text{si } x = 5 \end{cases}$

c) Sea y = mx + n: $\quad m = \lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \dfrac{\dfrac{x^2 - 25}{x - 5}}{x} = \lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 5x} = 1$

$$n = \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - mx \right] = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^2 - 25}{x - 5} - x \right] = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 25 - x^2 + 5x}{x - 5} = \lim_{x \to \infty} \frac{5x - 25}{x - 5} = 5$$

Por tanto, la recta y = x + 5 es una asíntota oblicua de la función.

3. *En cierta población cercana a una estación de esquí se quiere estimar con un nivel de confianza del 95% la proporción de habitantes que practican el esquí. Se toma una muestra de 400 habitantes de la población de la que 240 afirman que practican este deporte. Determinar el correspondiente intervalo de confianza. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta.* *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.

La proporción muestral de practicantes es: $pr = \dfrac{240}{400} = 0{,}6$ y la de no practicantes: $1 - pr = 0{,}4$

Para un nivel de confianza del 95%, el valor crítico es: $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

La cota de error es: $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\dfrac{pr \cdot (1 - pr)}{n}} = 1{,}96 \cdot \sqrt{\dfrac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{400}} = 0{,}048$

Por tanto, el intervalo de confianza para la proporción de practicantes en la población será:

$(0{,}6 - 0{,}048 \ , \ 0{,}6 + 0{,}048) = (0{,}552 \ , \ 0{,}648)$ es decir: entre el 55,2% y el 64,8%