

Septiembre 2002.

OPCIÓN A.

1. Una empresa se dedica a la producción de dos tipos de tejidos A y B utilizando como materias primas algodón, poliéster y seda. Se dispone de 60 unidades de algodón, de 35 de seda y de 80 de poliéster y se sabe que las unidades de cada materia prima necesarias para la producción de 1 rollo de cada tipo de tejido vienen dadas en la siguiente tabla

	algodón	poliéster	seda
A	1	2	0
B	3	2	1

- a) Calcular el beneficio total máximo, sabiendo que el beneficio obtenido de un rollo del tejido A es de 50 euros y del B es de 70. Explicar los pasos seguidos para obtener la solución. (7 puntos)
- b) ¿Se obtendría excedente de alguna materia prima?. En caso afirmativo, decir cuántas unidades. (2 puntos)
- c) ¿Cambiaría la solución del apartado a) si al menos hubiera que producir 15 rollos del tejido A?. Razona la respuesta. (1 punto)

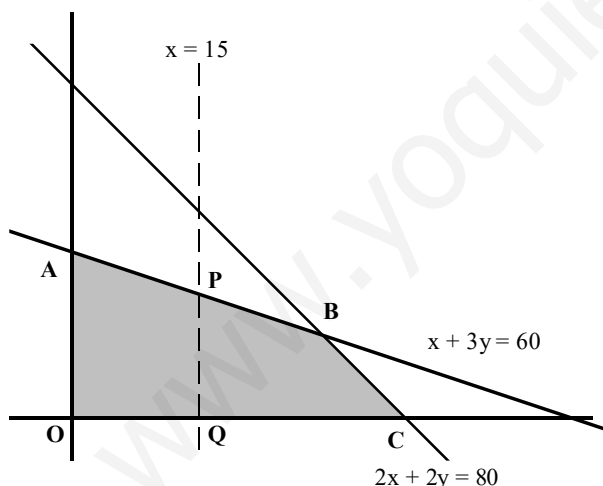
SOLUCIÓN.

Tejido	nº de rollos	algodón	poliéster	seda	Beneficio
A	x	x	2x	0x	50x
B	y	3y	2y	y	70y
	$x \geq 0 ; y \geq 0$	≤ 60	≤ 80	≤ 35	$F(x, y)$

Función objetivo: $F(x, y) = 50x + 70y$
Restricciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 3y \leq 60 \\ 2x + 2y \leq 80 \\ y \leq 35 \end{cases}$$

- a) Construyamos la región factible (solución del conjunto de restricciones):



Calculemos las coordenadas de los vértices de la región factible OABC:

Vértice O: $O(0, 0)$

Vértice A: $\begin{cases} x = 0 \\ x + 3y = 60 \end{cases} \Rightarrow A(0, 20)$

Vértice B: $\begin{cases} x + 3y = 60 \\ 2x + 2y = 80 \end{cases} \Rightarrow B(30, 10)$

Vértice C: $\begin{cases} y = 0 \\ 2x + 2y = 80 \end{cases} \Rightarrow C(40, 0)$

El valor que toma la función objetivo en los vértices de la región factible es:

$$F(0, 0) = 0, F(0, 20) = 1400, \\ F(30, 10) = 2200, F(40, 0) = 2000$$

Luego la función objetivo se maximiza en el punto $(30, 10)$, es decir deben fabricarse 30 rollos del tejido A y 10 del B y el beneficio obtenido será de 2200 euros.

- b) Se utilizarán $30 + 3 \cdot 10 = 60$ unidades de algodón, $2 \cdot 30 + 2 \cdot 10 = 80$ de poliéster y $0 \cdot 30 + 10 = 10$ de seda, luego sobrarán 25 unidades de seda.

- c) Si se añade la condición $x \geq 15$ la solución sigue siendo la misma. La región factible es ahora PBCQ y la función objetivo sigue maximizándose en el vértice B: $P(15, 15) \Rightarrow f(15, 15) = 1800$, $Q(15, 0) \Rightarrow f(15, 0) = 750$

2. La demanda de un bien en función de su precio viene dada por $D(p) = \frac{30p + 10}{p}$.

- a) Demostrar que al aumentar el precio disminuye la demanda. (2 puntos)
 b) Suponiendo que el precio aumenta indefinidamente, decir qué ocurrirá con la demanda. (3 puntos)
 c) Escribir los ingresos de una empresa en función del precio suponiendo que dicha empresa es la única que produce este bien. (1 punto)
 d) Calcular el precio para que la empresa del apartado anterior maximice sus beneficios sabiendo que los costes vienen dados por $C(p) = p^2/4$. (4 puntos)

SOLUCIÓN.

- a) Se trata de comprobar que la función demanda es decreciente. Para ello veamos el signo de su función derivada:

$$D'(p) = \frac{30p - 30p - 10}{p^2} = -\frac{10}{p^2} < 0 \quad \forall p \Rightarrow \text{la función es decreciente y, por tanto, cuando } p \text{ aumenta } D \text{ disminuye.}$$

b) $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{30p + 10}{p} = 30 \Rightarrow \text{la demanda tenderá a } 30$

c) $I(p) = D(p) \cdot p = \frac{30p + 10}{p} \cdot p = 30p + 10$

- d) Los beneficios son la diferencia entre los ingresos y los costes:

$$B(p) = I(p) - C(p) = 30p + 10 - \frac{p^2}{4} = -\frac{1}{4}p^2 + 30p + 10$$

Veamos para qué valor de p la función $B(x)$ alcanza su máximo:

$$B'(p) = -\frac{1}{2}p + 30 = 0 \Rightarrow p = 60 \text{ (valor crítico). Comprobemos que este valor de } p \text{ maximiza los beneficios:}$$

$$B''(p) = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow \text{máximo, luego, en efecto a un precio de } 60 \text{ los beneficios serán máximos}$$

3. Se lanzan un dado azul y tres rojos. Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:

- a) En todos los dados rojos se obtiene la misma puntuación que en el azul. (3 puntos)
 b) Al menos en uno de los rojos se obtiene la misma puntuación que en el azul. (3,5 puntos)
 c) Todas las puntuaciones obtenidas son pares o todas son múltiplos de 3. (3,5 puntos)

SOLUCIÓN.

a) El suceso equivale a que en los cuatro dados se obtenga la misma puntuación: $p = 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216} = 0,0046$

b) La probabilidad de que en los tres dados rojos salga una puntuación distinta que la puntuación obtenida en el azul es
 de: $\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot 6 = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216} = 0,5787 \Rightarrow \text{la probabilidad de que en algún dado rojo salga la misma puntuación que}$

la obtenida en el azul es: $1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216} = 0,4213$.

c) $p(\text{Y 3}) = p(2) + p(3) - p(2 \text{ Y } 3) = \left(\frac{3}{6}\right)^4 + \left(\frac{2}{6}\right)^4 - \left(\frac{1}{6}\right)^4 = 0,074$

Septiembre 2002.

OPCIÓN B.

1. a) Se considera el sistema
$$\begin{cases} (a-3)x + by + cz = -5 \\ bx - ay + 10z = 17 \\ ax + z = c + 6 \end{cases}$$
. Calcular, mediante el método de Gauss, los posibles valores que pueden tomar los parámetros a , b y c para que el sistema tenga por solución $x = 1$, $y = -3$, $z = -1$. (7 puntos)

- b) Con las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ comprobar la propiedad asociativa del producto de matrices. (3 puntos)

SOLUCIÓN.

- a) Si las soluciones han de ser las que se indican, las podemos sustituir en el sistema dado y después resolver el sistema que queda (donde las incógnitas serán los parámetros):

$$\begin{cases} a-3-3b-c=-5 \\ b+3a-10=17 \\ a-1=c+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-3b-c=-2 \\ 3a+b=27 \\ a-c=7 \end{cases} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a-3b-c=-2 \\ 10b+3c=33 \\ 3b=9 \end{cases} \Leftrightarrow b=3, c=1, a=8$$

Transformaciones elementales: (1) $E_2 - 3E_1$, $E_3 - E_1$

- b) Hay que comprobar que $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$:

$$(A \cdot B) \cdot C = \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 27 & 32 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -2 \\ 118 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 & -1 \\ 16 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -2 \\ 118 & -5 \end{pmatrix}$$

luego, en efecto, se cumple la propiedad asociativa del producto para estas matrices.

2. Se considera $f(x) = ax^4 - \frac{9x^2}{2} + b$

- a) Calcular el valor de los parámetros a y b para que $f(x)$ tenga un mínimo en el punto $(3, -8)$. (6 puntos)

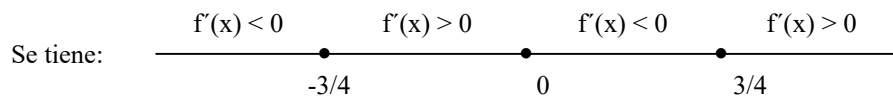
- b) Para $a = 4$ y $b = 0$, calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. (4 puntos)

SOLUCIÓN

- a) Si $f(x)$ tiene un mínimo en el punto $(3, -8)$, debe ocurrir: $f(3) = -8$ y $f'(3) = 0$. Tenemos: $f'(x) = 4ax^3 - 9x$
Exigiendo que se cumplan las dos condiciones citadas:

$$\begin{cases} 81a - \frac{81}{2} + b = -8 \\ 108a - 27 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{27}{108} = \frac{1}{4}, b = -8 - \frac{81}{4} + \frac{81}{2} = \frac{49}{4} \text{ es decir: } a = \frac{1}{4} \text{ y } b = \frac{49}{4}$$

- b) La función es $f(x) = 4x^4 - \frac{9}{2}x^2 \Rightarrow f'(x) = 16x^3 - 9x$. El estudio del crecimiento y decrecimiento es el estudio del signo de $f'(x)$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 16x^3 - 9x = x(16x^2 - 9) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm \frac{3}{4}$.



luego la función es:

decreciente en $\left(-\infty, -\frac{3}{4}\right) \cup \left(0, \frac{3}{4}\right)$ y creciente en $\left(-\frac{3}{4}, 0\right) \cup \left(\frac{3}{4}, \infty\right)$

3. En una población, por cada persona que fuma 4 no lo hacen. Calcular el tamaño mínimo que debe tener una muestra de dicha población para que, con un nivel de confianza del 95%, la proporción muestral y la poblacional no difieran en más de 0,04. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta. (10 puntos)

SOLUCIÓN.

La proporción de fumadores en la población es $pr = \frac{1}{5} = 0,2$ y la proporción de no fumadores será de $1 - pr = 0,8$.

Para un nivel de confianza del 95%, el valor crítico que debemos utilizar es $z_{\alpha/2} = 1,96$

El error máximo admisible entre los datos de la muestra y de la población es:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot (1 - pr)}{n}} \Rightarrow \frac{E^2}{z_{\alpha/2}^2} = \frac{pr \cdot (1 - pr)}{n} \Rightarrow n = \frac{z_{\alpha/2}^2 \cdot pr \cdot (1 - pr)}{E^2} = \frac{1,96^2 \cdot 0,2 \cdot 0,8}{0,04^2} = 2501$$

luego la muestra debe estar formada por un mínimo de 2501 personas.