Septiembre 2004.

OPCIÓN A.

1. *Un industrial comercializa botijos decorados y botijos sin decorar. El tiempo necesario para fabricar un botijo es de una hora y para decorarlo se necesita otra hora. El beneficio por botijo es de 10 euros si está decorado y de 6 euros si no lo está y se trabaja un máximo de 500 horas mensuales.*

a) Plantear y resolver un problema de programación lineal que permita calcular cuántos botijos de cada tipo se han de fabricar al mes para que el beneficio total sea máximo. *(5 puntos)*
b) ¿Cambiaría la solución del apartado anterior si no se desean fabricar más de 300 botijos sin decorar?. En caso afirmativo, calcularla. *(3 puntos)*
c) Calcular la solución del apartado a) y decir en qué puntos se alcanza, si el beneficio por botijo no decorado es de 5 euros. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

Se trata de un problema de Programación Lineal. Organicemos los datos del problema en una tabla:

tipo de botijo	número	horas mensuales	beneficio
decorado	x	2x	10x
sin decorar	y	y	6y
	$x \geq 0$ $y \geq 0$	$2x + y \leq 500$	$f(x, y) = 10x + 6y$

Se tiene:
X La función objetivo (que debe ser máxima) es:

$$f(x, y) = 10x + 6y$$

X El conjunto de restricciones es:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 500 \end{cases}$$

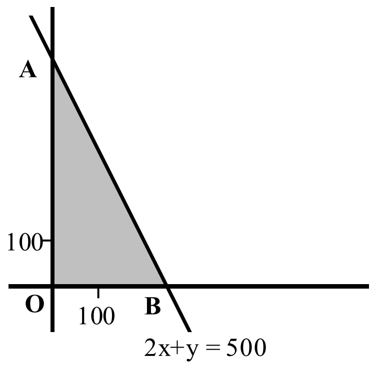
Resolvamos gráficamente el sistema de restricciones para encontrar la región factible:

- La ecuación $x = 0$ corresponde al eje de ordenadas. La solución de la inecuación $x \geq 0$ es el semiplano de la derecha.
- La ecuación $y = 0$ corresponde al eje de abscisas. La solución de la inecuación $y \geq 0$ es el semiplano superior.
- La ecuación $2x + y = 500$ corresponde a una recta que pasa por los puntos $(250, 0)$ y $(0, 500)$. La solución de la inecuación $2x + y \leq 500$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas.

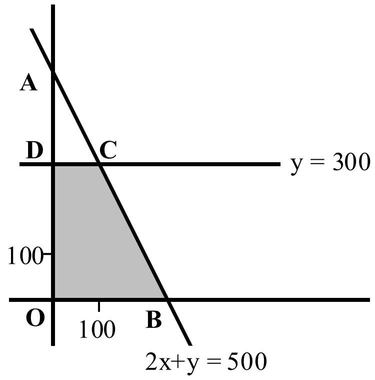
La región factible es el triángulo de vértices: $O(0, 0)$, $A(0, 500)$ y $B(250, 0)$. En alguno de estos dos vértices deberá maximizarse la función objetivo. Veamos en cuál:

$$f(0, 0) = 0 \quad ; \quad f(0, 500) = 3000 \quad ; \quad f(250, 0) = 2500$$

luego la función objetivo es máxima en el vértice A, lo que significa que conviene fabricar 500 botijos sin decorar.



b) Al incluir la restricción $y \leq 300$, se modifica la región factible:



Ahora es el cuadrilátero de vértices $O(0, 0)$, $B(250, 0)$, $C(100, 300)$ y $D(0, 300)$. Veamos en cuál de los vértices se maximiza la función objetivo:

$$f(0, 0) = 0 \;\; ; \;\; f(250, 0) = 2500 \;\; ; \;\; f(100, 300) = 2800 \;\; ;$$
$$f(0, 300) = 1800$$

luego la función objetivo es máxima en el vértice C. Conviene entonces fabricar 100 botijos decorados y 300 sin decorar.

c) Se modifica la función objetivo: $g(x, y) = 10x + 5y$. La región factible es la del apartado a). Se comprueba que la nueva función objetivo se maximiza en cualquier punto (de coordenadas enteras) del segmento AB.

2. *Se considera la función* $f(x) = \dfrac{2x}{x+5}$

a) Razonar a qué es igual el dominio de definición de f(x). (1,25 puntos)
b) Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f(x). (2,5 puntos)
c) Determinar los intervalos de concavidad y de convexidad de f(x) y los puntos de inflexión. (3,25 puntos)
d) Determinar los valores de a y b para que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto $x = -3$ *sea* $y = ax + b$ *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Como se trata de una función racional, el dominio estará formado por todos los números reales excepto los que anulan el denominador, es decir: $Dom\,(f) = \Re - \{-5\}$

b) El crecimiento y decrecimiento de la función dependen del signo de la primera derivada:

$f\,'(x) = \dfrac{2\cdot(x+5) - 2x}{(x+5)^2} = \dfrac{10}{(x+5)^2} > 0 \quad \forall x \;\Rightarrow$ la función es creciente en todo su dominio

c) La concavidad y convexidad dependen del signo de la segunda derivada:

$f\,''(x) = \dfrac{-10\cdot 2\,(x+5)}{(x+5)^4} = \dfrac{-20}{(x+5)^3} \;\Rightarrow$

f´´(x) > 0 | f´´(x) < 0

! 5

es decir: la función es cóncava en $(-\infty, -5)$ y convexa en $(-5, \infty)$.

Un punto de inflexión anula la segunda derivada. Como en este caso $f\,''(x) = \dfrac{-20}{(x+5)^3} \neq 0 \;\; \forall x$, la función no tiene puntos de inflexión.

d) Calculemos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en $x = -3$ y démosle la forma $y = ax + b$:

La pendiente es $a = f\,'(-3) = \dfrac{10}{(-3+5)^2} = \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2} \;\Rightarrow$ la ecuación de la tangente es: $y = \dfrac{5}{2}x + b$

Como además pasa por el punto $(-3, -3)$: $-3 = \dfrac{5}{2}\cdot(-3) + b \;\Rightarrow\; b = -3 + \dfrac{15}{2} = \dfrac{9}{2}$

Por tanto: $a = \dfrac{5}{2}$, $b = \dfrac{9}{2}$

3. *Un dado está cargado de forma que la probabilidad de obtener 6 puntos es ½ y que las probabilidades de obtener cada una de las otras caras son iguales. Se lanza el dado, calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:*
a) Se obtiene un dos. (2 p)
b) No se obtiene un tres. (3 p)
c) Se obtiene un número par. (3 p)
d) Se obtiene un número impar. (2 p)

SOLUCIÓN.

Si la probabilidad de obtener un 6 es $\dfrac{1}{2}$, $p\,(6) = \dfrac{1}{2}$, la probabilidad de obtener cada uno de los restantes resultados (equiprobables) será $\dfrac{1}{2} : 5 = \dfrac{1}{10}$, es decir: $p\,(1) = p\,(2) = p\,(3) = p\,(4) = p\,(5) = \dfrac{1}{10}$. Se tiene:

a) $p\,(2) = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$

b) $p\,(\overline{3}) = 1 - p\,(3) = 1 - \dfrac{1}{10} = \dfrac{9}{10} = 0{,}9$

c) $p\,(par) = p\,(2 \text{ Y } 4 \text{ Y } 6) = p\,(2) + p\,(4) + p\,(6) = \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{10} = 0{,}7$

d) $p\,(impar) = 1 - p\,(par) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

Septiembre 2004.

OPCIÓN B.

1. *Se consideran las matrices* $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\1&2&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3&2&0\\0&1&2\\0&2&3\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-3&-1&0\\1&0&4\\2&1&3\end{pmatrix}$.

a) Utilizando la matriz inversa de A, determinar una matriz X tal que $AX=B+C$ *(6,5 puntos)*

b) Discutir si existe solución del sistema $B\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$. *En caso afirmativo, resolverlo utilizando el método de Gauss.* *(3,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $AX=B+C \;\Rightarrow\; A^{-1}AX=A^{-1}(B+C) \;\Rightarrow\; X=A^{-1}(B+C)$

Calculemos A^{-1}: $\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&2&1&0&1&0\\1&2&2&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{F_3-F_1}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&2&1&0&1&0\\0&2&2&-1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{F_3-F_2}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&2&1&0&1&0\\0&0&1&-1&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{F_2-F_3}$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&2&0&1&2&-1\\0&0&1&-1&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{F_2:2}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\\0&0&1&-1&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\\-1&-1&1\end{pmatrix}$$

Por tanto: $X=\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\\-1&-1&1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}-3&2&0\\0&1&2\\0&2&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&-1&0\\1&0&4\\2&1&3\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\\-1&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6&1&0\\1&1&6\\2&3&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&1&0\\-3&0&3\\7&1&0\end{pmatrix}$

b) Calculemos el rango de la matriz de los coeficientes y el de la matriz ampliada:

$rg\left(\begin{array}{ccc|c}-3&2&0&2\\0&1&2&1\\0&2&3&2\end{array}\right)\overset{(1)}{=}rg\left(\begin{array}{ccc|c}-3&2&0&2\\0&1&2&1\\0&0&-1&0\end{array}\right)\Rightarrow rg\,A=rg\,B=n^{o}\,de\,incógnitas\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado. Transformaciones elementales utilizadas: (1) F_3-2F_2

El sistema escalonado equivalente es: $\begin{cases}-3x+2y=2\\ \quad y+2z=1\\ \quad -z=0\end{cases}\Rightarrow z=0\;,\; y=1\;,\; x=0$

2. *Se considera la función* $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$ *, con a y b parámetros reales.*
a) ¿Existen valores de a y b para los que f(x) tenga un máximo en $x=1$ *y un mínimo en* $x=-1$ *?* *(5 puntos)*
b) Determinar los valores de a y b para que f(x) tenga un punto de inflexión en $(2\,,\,1)$. *(3 puntos)*
c) Para $a=b=1$ *, ¿existen asíntotas verticales de f(x)?, y ¿asíntotas horizontales?.* *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Si f(x) tiene un máximo en $x=1$ y un mínimo en $x=-1$, deben ser $f'(1)=0$ y $f'(-1)=0$:

$f'(x)=3x^2+2ax+b$ y por tanto: $\begin{cases}3+2a+b=0\\3-2a+b=0\end{cases}\Rightarrow\ 6+2b=0\ \Rightarrow\ b=-3$ y sustituyendo en cualquiera de las dos igualdades: $a=0$

b) Si f(x) tiene un punto de inflexión en $(2\,,\,1)$ deben ser: $f(2)=1$ y $f''(2)=0$.

Se tiene: $f''(x)=6x+2a$ luego: $\begin{cases}8+4a+2b+2=1\\12+2a=0\end{cases}$

De la segunda ecuación obtenemos $a=-6$ y sustituyendo en la primera: $8-24+2b+2=1\Rightarrow 2b=15\Rightarrow b=\dfrac{15}{2}$

c) La función es: $f(x)=x^3+x^2+x+2$ que no tiene asíntotas de ningún tipo por tratarse de una función polinómica.

3. *En una gran empresa, la varianza del número de horas no trabajadas al año por un trabajador es 16. Calcular, con un nivel de confianza del 95%, un intervalo para la media del número de horas no trabajadas al año por un empleado, sabiendo que de una muestra de 100 trabajadores se ha obtenido una media de 12 horas no trabajadas al año. Explicar cada uno de los pasos realizados.* *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.

La desviación típica poblacional es la raíz cuadrada de la varianza: $\sigma=\sqrt{16}=4$ horas
La media muestral es $\overline{X}=12$ horas.

El intervalo de confianza de la media poblacional μ es: $\left(\overline{X}-E\,,\,\overline{X}+E\right)$ donde E (error máximo admitido) se calcula de la siguiente forma:

$E=z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=1{,}96\cdot\dfrac{4}{\sqrt{100}}=1{,}96\cdot 0{,}4=0{,}784$ luego el intervalo de confianza es: $(11{,}216\ ,\ 12{,}784)$

es decir, la media de la población estará entre 11,216 horas y 12,784 horas con un nivel de confianza del 95%.