

OPCIÓN A

1. Un agricultor dispone de 9 hectáreas para sembrar dos productos A y B. Para el producto A desea destinar como mucho 8 hectáreas. Por cada hectárea sembrada con A y B se obtiene respectivamente un beneficio de 150 y 100 euros.

a) Si se quiere que la superficie correspondiente a B no sea mayor que la mitad que ocupará A, plantee y resuelva un problema de programación lineal que permita averiguar el número de hectáreas que se han de dedicar a cada producto para maximizar el beneficio total. (6 puntos)

b) ¿Cuál es la solución si el beneficio por hectárea es de 125 euros independientemente de que esté sembrada con A o con B y no se tiene en cuenta la restricción del apartado a)? (4 puntos)

SOLUCIÓN

a) Organicemos los datos y condiciones del problema en una tabla:

PRODUCTO	HECTÁREAS	BENEFICIO
A	x	150x
B	y	100y

$0 \leq x \leq 8$ $y \geq 0$ $x + y \leq 9$ $y \leq \frac{x}{2}$

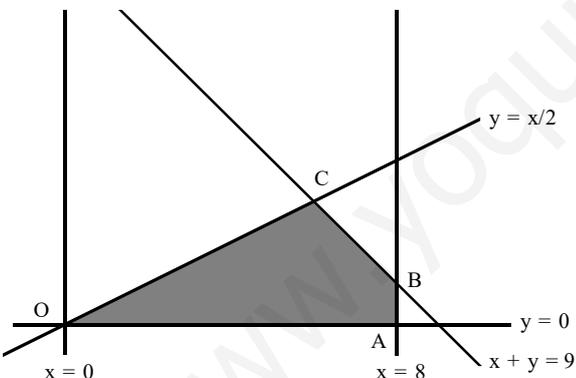
∃ La función objetivo, que debe maximizarse, es:

$$F(x, y) = 150x + 100y$$

∃ Las restricciones de la solución son:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 8 \\ x + y \leq 9 \\ y \leq \frac{x}{2} \end{cases}$$

La región factible (puntos del plano que satisfacen al conjunto de restricciones) es el cuadrilátero OABC:



La función objetivo se optimiza en alguno de los vértices de la región factible. Obtengamos sus coordenadas y el valor de la función objetivo en cada uno de ellos:

Vértice O: $O(0, 0) \Rightarrow F(0, 0) = 0 \text{ €}$

Vértice A: $A(8, 0) \Rightarrow F(8, 0) = 1200 \text{ €}$

Vértice B: $\begin{cases} x = 8 \\ x + y = 9 \end{cases} \Rightarrow B(8, 1) \Rightarrow F(8, 1) = 1300 \text{ €}$

Vértice C: $\begin{cases} y = \frac{x}{2} \\ x + y = 9 \end{cases} \Rightarrow C(6, 3) \Rightarrow F(6, 3) = 1200 \text{ €}$

Por tanto, para maximizar el beneficio se deben dedicar 8 hectáreas al producto A y 1 hectárea al producto B.

b) Ahora la función objetivo es: $G(x, y) = 125x + 125y$
y las restricciones: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \leq 8$, $x + y \leq 9$

La nueva región factible es el cuadrilátero OABD. Sus vértices y el valor de la función objetivo en cada uno de ellos son:

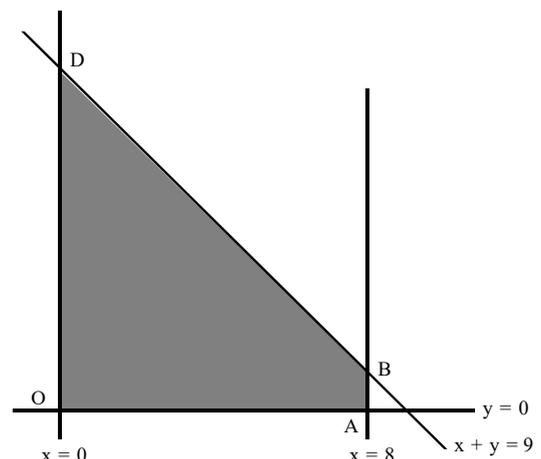
$O(0, 0) \Rightarrow F(0, 0) = 0 \text{ €}$

$A(8, 0) \Rightarrow F(8, 0) = 1000 \text{ €}$

$B(8, 1) \Rightarrow F(8, 1) = 1125 \text{ €}$

$D(0, 9) \Rightarrow F(0, 9) = 1125 \text{ €}$

Luego la solución es cualquier punto del segmento BD.



2. Se considera la función $f(x) = -\frac{x^4}{2} + 5x^3 - 18x^2 + 28x + 9$

- a) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los máximos y mínimos (4,75 puntos)
 b) Determine los intervalos de concavidad y de convexidad y los puntos de inflexión. (3,75 puntos)
 c) Escriba la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $x = 1$. (1,5 puntos)

SOLUCIÓN.

Como van a ser utilizadas a lo largo del ejercicio, obtengamos las sucesivas derivadas de la función:

$$f'(x) = -2x^3 + 15x^2 - 36x + 28, \quad f''(x) = -6x^2 + 30x - 36, \quad f'''(x) = -12x + 30$$

a) Como la función es continua por ser polinómica, los intervalos de crecimiento y decrecimiento están separados por los puntos de máximo y de mínimo:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^3 + 15x^2 - 36x + 28 = 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} -2 \cdot (x-2)^2 \cdot \left(x - \frac{7}{2}\right) = 0 \Rightarrow x = 2, x = \frac{7}{2} \text{ (puntos críticos)}$$

(1)	B2	15	B36	28	Ψ	$-2x^3 + 15x^2 - 36x + 28 = (x-2) \cdot (-2x^2 + 11x - 14) =$
2		B4	22	B28		$= (x-2) \cdot (-2) \cdot (x-2) \cdot \left(x - \frac{7}{2}\right) = -2 \cdot (x-2)^2 \cdot \left(x - \frac{7}{2}\right)$
	B2	11	B14	0		

$f''(2) = 0, f'''(2) \neq 0 \Rightarrow$ en $x = 2$ la función tiene un punto de inflexión

$$f''\left(\frac{7}{2}\right) = -6 \cdot \frac{49}{4} + 30 \cdot \frac{7}{2} - 36 = -\frac{147}{2} + \frac{210}{2} - \frac{72}{2} = -\frac{9}{2} < 0 \Rightarrow \text{en } x = \frac{7}{2} \text{ la función tiene un máximo relativo.}$$

Por tanto, en $\left(-\infty, \frac{7}{2}\right)$ la función es creciente y en $\left(\frac{7}{2}, \infty\right)$ es decreciente.

b) Los posibles puntos de inflexión anulan la segunda derivada: $-6x^2 + 30x - 36 = 0 \Rightarrow x = 2, x = 3$. Se tiene:

$f' < 0$		$f' > 0$		$f' < 0$
Convexa	2	Cóncava	3	Convexa

En $x = 2$ y $x = 3$ la función tiene sendos puntos de inflexión pues $f'''(2) \neq 0$ y $f'''(3) \neq 0$

c) La pendiente es $f'(1) = 5$ y además pasa por el punto de tangencia, cuyas coordenadas son: $x = 1, y = f(1) = \frac{47}{2}$

luego la ecuación es: $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y - \frac{47}{2} = 5 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow 10x - 2y + 37 = 0$

3. En un Instituto de Idiomas se expiden dos certificados: el A (de nivel básico) y el B (de nivel superior). Para su obtención es necesario pasar una prueba o examen, pudiendo una persona presentarse a la prueba del B aunque no tenga el certificado A. Se sabe que la prueba para el certificado B la pasan 80 de cada 100 personas que tienen el A y 40 de cada 100 que no lo tienen. Dos amigos se presentan a la prueba para obtener el certificado B, uno tiene el A y el otro no. Calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:

- a) Ambos obtienen el certificado. (2,5 puntos)
 b) Solamente obtiene el certificado el que ya tiene el A. (2,5 puntos)
 c) Solamente obtiene el certificado el que no tiene el A. (2,5 puntos)
 d) Solamente uno obtiene el certificado. (2,5 puntos)

SOLUCIÓN.

- a) $p(B/A \mid B/\bar{A}) = p(B/A) \cdot p(B/\bar{A}) = 0,8 \cdot 0,4 = 0,32$
 b) $p(B/A \mid \bar{B}/\bar{A}) = p(B/A) \cdot p(\bar{B}/\bar{A}) = 0,8 \cdot 0,6 = 0,48$
 c) $p(\bar{B}/A \mid B/\bar{A}) = p(\bar{B}/A) \cdot p(B/\bar{A}) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08$
 d) $p(B/A \mid \bar{B}/\bar{A}) + p(\bar{B}/A \mid B/\bar{A}) = 0,48 + 0,08 = 0,56$

OPCIÓN B

1. a) Mediante cálculo matricial, discuta y resuelva el sistema:
$$\begin{cases} 2x - y + z = -3 \\ 2x + 3y - z = 1 \\ 2x + 7y - 3z = 5 \end{cases} \quad (5 \text{ puntos})$$
- b) Calcule la matriz X solución de la ecuación $2X + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ (5 puntos)

SOLUCIÓN.

a) Escribamos las matrices de los coeficientes y ampliada y apliquemos las transformaciones elementales necesarias para triangularizar las matrices:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 7 & -3 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & 8 & -4 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{el sistema es compatible indeterminado}$$

Transformaciones elementales utilizadas: (1) $F_2 - F_1$, $F_3 - F_1$ (2) $F_3 \neq 2F_2$

El sistema escalonado equivalente al dado es:
$$\begin{cases} 2x - y + z = -3 \\ 2y - z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = -3 - \lambda \\ 2y = 2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow y = \frac{2 + \lambda}{2};$$

$$2x = -3 - \lambda + \frac{2 + \lambda}{2} = \frac{-4 - \lambda}{2} \Rightarrow x = -\frac{4 + \lambda}{4}. \quad \text{Es decir: } x = -\frac{4 + \lambda}{4}, y = \frac{2 + \lambda}{2}, z = \lambda$$

b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 15 \\ -9 & -11 \end{pmatrix}$$

Se tiene:
$$2X = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -14 & 15 \\ -9 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -11 \\ 13 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 13 & -11 \\ 13 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} & -\frac{11}{2} \\ \frac{13}{2} & 6 \end{pmatrix}$$

2. Sea
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2x - 1}{x + a} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) ¿Existe algún valor del parámetro a para el que $f(x)$ sea continua en $x = 0$? (2,5 puntos)
- b) Para $a = \frac{1}{2}$, calcule los intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad de $f(x)$. (6 puntos)
- c) Para $a = 2$, compruebe si $x = \frac{1}{2}$ es asíntota vertical de $f(x)$. (1,5 puntos)

SOLUCIÓN.

a) Para que la función sea continua en $x = 0$ debe ocurrir:

$$\exists \exists f(0) = -\frac{1}{a}$$

$$\exists \exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 1}{x + a} \Leftrightarrow -2 = -\frac{1}{a} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

\exists Para este valor del parámetro, se tiene: $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ es decir, la función es continua en $x = 0$.

b) La función es:
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2x - 1}{x + \frac{1}{2}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

La función derivada es:
$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

f' < 0		f' > 0
DECRECIENTE	0	CRECIENTE

La función segunda derivada:
$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ -\frac{4}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^3} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

f'' > 0		f'' < 0
CÓNCAVA	0	CONVEXA

c) La función es:
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2x - 1}{x + 2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

La recta $x = \frac{1}{2}$ no es una asíntota vertical de la función porque:
$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x - 1}{x + 2} = 0$$

3. Se ha obtenido que el intervalo de confianza correspondiente al 95% de una variable es (6,66, 8,34). Calcule la media y el tamaño de la muestra que se ha estudiado para obtener el intervalo sabiendo que la desviación típica es igual a 3. Explique cada uno de los pasos realizados. (10 puntos)

SOLUCIÓN.

La media es el valor central del intervalo: $\bar{X} = \frac{6,66 + 8,34}{2} = 7,5$

El radio del intervalo (error máximo admitido) es: $E = 7,5 - 6,66 = 0,84$

Para un nivel de confianza del 95%, el valor crítico es: $z_{\alpha/2} = 1,96$

Se tiene: $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0,84 = 1,96 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0,84 \cdot \sqrt{n} = 5,88 \Rightarrow \sqrt{n} = 7 \Rightarrow n = 49$