

Junio 2005.

OPCIÓN A

1. En un taller de joyería se fabrican collares con 50, 75 y 85 perlas y para ello se utilizan en su totalidad 17500 perlas y 240 cierres.

a) ¿Cuántos collares de cada tamaño se han de fabricar si se desean tantos collares de tamaño mediano como la media aritmética del número de collares grandes y pequeños? (6 puntos)

b) Sin tener en cuenta la condición del apartado anterior, ¿es posible fabricar el mismo número de collares de cada tamaño? (4 puntos)

SOLUCIÓN.

Sea x el número de collares con 50 perlas, y el número de collares con 75 perlas, z el número de collares con 85 perlas.

a) Como se utiliza un cierre por cada collar, se tiene: $x + y + z = 240$ (*)

El número de perlas utilizadas es: $50x + 75y + 85z = 17500$ (*)

Como y debe ser igual a la media aritmética de x y z : $y = \frac{x+z}{2} \Leftrightarrow x - 2y + z = 0$ (*)

Las igualdades (*) forman un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas que vamos a resolver por el método de Gauss. Las matrices de los coeficientes y ampliada son:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 240 \\ 50 & 75 & 85 & 17500 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 240 \\ 10 & 15 & 17 & 3500 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 240 \\ 0 & 5 & 7 & 1100 \\ 0 & -3 & 0 & -240 \end{array} \right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 240 \\ 0 & 5 & 7 & 1100 \\ 0 & 0 & 21 & 2100 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} x = 60 \\ y = 80 \\ z = 100 \end{array}$$

Transformaciones elementales utilizadas: (1) $\frac{F_2}{5}$ (2) $F_2 - 10F_1$; $F_3 - F_1$ (3) $5F_3 + 3F_2$

Luego se han de fabricar 60 collares de 50 perlas, 80 de 75 perlas y 100 collares de 85 perlas.

b) Al eliminar la tercera condición, el sistema es de dos ecuaciones con tres incógnitas. El sistema escalonado equivalente es:

$$\begin{cases} x + y + z = 240 \\ 5y + 7z = 1100 \end{cases}$$

Si es posible fabricar el mismo número de collares de cada tamaño, debe ser $x = y = z$, es decir: $\begin{cases} 3z = 240 \\ 12z = 1100 \end{cases}$ y cada

una de las dos ecuaciones da un valor de z distinto. La conclusión es que no se puede fabricar el mismo número de collares de cada tamaño pues son incompatibles las condiciones sobre el total de cierres y el total de perlas.

2. Se considera la función $f(x) = a \ln x + x^3$, siendo a un parámetro real.

a) Escriba el dominio de definición de $f(x)$. (0,75 puntos)

b) Compruebe si hay algún valor de a para el que $f(x)$ tiene punto de inflexión en $x = 1$. (3,25 puntos)

c) Para $a = -3$ calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de la función $f(x)$. (3,5 puntos)

d) Para $a = 1$ calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ (2,5 puntos)

SOLUCIÓN.

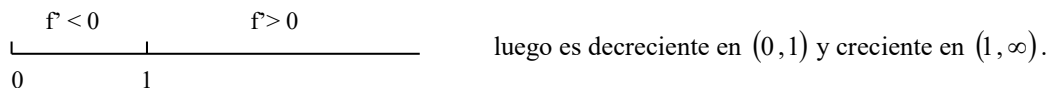
a) El dominio de $f(x)$ es el de $y = \ln x$: $D(f) = (0, +\infty)$

b) Para que la función tenga un punto de inflexión en $x = 1$ debe ser $f''(1) = 0$:

$$\text{Se tiene: } f'(x) = \frac{a}{x} + 3x^2 \Rightarrow f''(x) = -\frac{a}{x^2} + 6x \Rightarrow f''(1) = -a + 6 = 0 \Rightarrow a = 6$$

c) Para $a = 6$, la función es: $f(x) = -3 \ln x + x^3$. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento dependen del signo de la primera derivada: $f'(x) = -\frac{3}{x} + 3x^2$

$$\text{Se tiene: } -\frac{3}{x} + 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 = \frac{3}{x} \Rightarrow 3x^3 = 3 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ es decir:}$$



La función tiene un posible máximo o mínimo en $x = 1$. Como $f''(x) = \frac{3}{x^2} + 6x \Rightarrow f''(1) > 0 \Rightarrow$ la función tiene un mínimo relativo en $x = 1$.

También se podría haber argumentado así: $f(x)$ es una función continua que es decreciente hasta $x = 1$ y creciente a partir de $x = 1$ por lo que debe tener un mínimo relativo en ese punto.

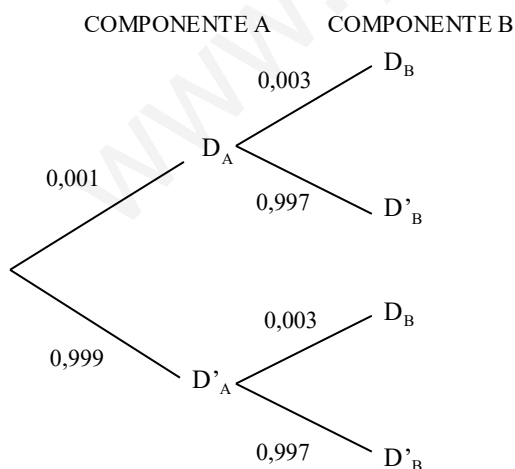
d) La función es ahora: $f(x) = \ln x + x^3$. Se tiene: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + x^3) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x + x^3) = -\infty$

3. Una fábrica produce un elemento mecánico ensamblando dos componentes A y B. Se sabe que la probabilidad de que el componente A sea defectuoso es de 0'001 y la de que B no lo sea es de 0'997. Se elige al azar un elemento, calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:

- a) Solamente el componente A es defectuoso. (2,5 puntos)
- b) Ninguno de los componentes es defectuoso (2,5 puntos)
- c) Ambos componentes son defectuosos. (2,5 puntos)
- d) Solamente uno de los componentes es defectuoso. (2,5 puntos)

SOLUCIÓN.

Organicemos todas las situaciones posibles mediante un diagrama en árbol:



Sean: D_A el suceso “el componente A es defectuoso”, D'_A el suceso “el componente A no es defectuoso”, D_B el suceso “el componente B es defectuoso” y D'_B el suceso “el componente B no es defectuoso”. Se tiene:

a) $p(D_A \cap D'_B) = 0,001 \cdot 0,997 = 0,000997$

b) $p(D'_A \cap D'_B) = 0,999 \cdot 0,997 = 0,996003$

c) $p(D_A \cap D_B) = 0,001 \cdot 0,003 = 0,000003$

d) $p[(D_A \cap D'_B) \cup (D'_A \cap D_B)] =$
 $= p(D_A \cap D'_B) + p(D'_A \cap D_B) =$
 $= 0,001 \cdot 0,997 + 0,999 \cdot 0,003 = 0,003994$

Junio 2005

OPCIÓN B

1. Sea T la región del plano determinada por las siguientes inecuaciones: $-2 \leq y$ $y \leq 2x + 2$ $y + 2x \leq 6$

a) Representa gráficamente la región T . (2 puntos)

b) Se considera la función $f(x, y) = \frac{2x - y}{2}$. Calcule, si existen, los puntos (x, y) que dan el valor máximo de $f(x, y)$ y los que dan el valor mínimo de $f(x, y)$ en T . (3,5 puntos)

c) Calcule las respuestas del apartado anterior si en T se cambia la desigualdad $y \leq 2x + 2$ por $x \geq 2$. (4,5 puntos)

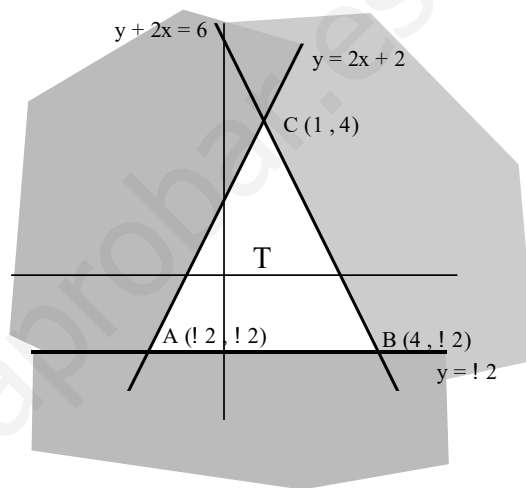
SOLUCIÓN.

a) X La inecuación $-2 \leq y$ tiene por solución los puntos del semiplano superior limitado por la recta $y = -2$.

X La recta $y = 2x + 2$ pasa por los puntos $(0, 2)$ y $(-1, 0)$. El semiplano solución de la inecuación $y \leq 2x + 2$ es el que contiene al origen de coordenadas, pues: $0 \leq 0 + 2$.

X La recta $y + 2x = 6$ pasa por los puntos $(0, 6)$ y $(3, 0)$. El semiplano solución de la inecuación $y + 2x \leq 6$ es el que contiene al origen de coordenadas, pues: $0 \leq 6$.

La región T es el triángulo de vértices A , B y C .



b) La función objetivo $f(x, y) = \frac{2x - y}{2}$ se maximiza o minimiza en los vértices de la región T . Obtengamos las coordenadas de dichos vértices y el valor de la función en cada uno de ellos:

X El vértice A es el punto de corte de las rectas $y = 2x + 2$ y $y = -2$: $\begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow A(-2, -2) \Rightarrow$

$$f(-2, -2) = \frac{-4 + 2}{2} = -1$$

X Las coordenadas del vértice B son las soluciones del sistema $\begin{cases} y = -2 \\ y + 2x = 6 \end{cases} \Rightarrow B(4, -2) \Rightarrow f(4, -2) = 5$

X Las coordenadas de C son las soluciones del sistema $\begin{cases} y = 2x + 2 \\ y + 2x = 6 \end{cases} \Rightarrow C(1, 4) \Rightarrow f(1, 4) = -1$

Por tanto, a la vista de los resultados, la función es máxima en el punto $B(4, -2)$ y mínima en cualquier punto del segmento AC .

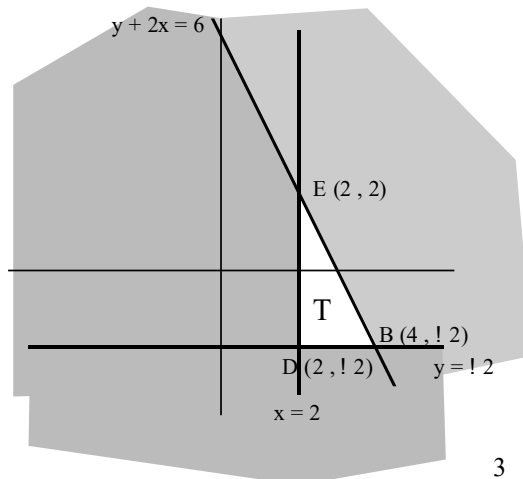
c) Al cambiar la desigualdad $y \leq 2x + 2$ por la $x \geq 2$, la región T es ahora:

X El vértice D es $D(2, -2) \Rightarrow f(2, -2) = 3$

X El vértice B es $B(4, -2) \Rightarrow f(4, -2) = 5$

X El vértice E es $E(2, 2) \Rightarrow f(2, 2) = 1$

luego la función es máxima en el punto $B(4, -2)$ y mínima en el punto $E(2, 2)$.



2. Se sabe que la función de beneficios de una empresa es de la forma $B(x) = ax + b\sqrt{x}$, siendo x el número de unidades producidas y a y b parámetros reales.

a) Calcule, si existen, los valores de los parámetros a y b para que una producción de $x = 100$ proporcione un beneficio de 50 unidades monetarias y que además sea el máximo que se puede obtener. (6 puntos)

b) Para $a = -1$ y $b = 16$, calcule las cantidades que se han de producir para que el beneficio aumente o disminuya (intervalos de crecimiento y decrecimiento) y los puntos de inflexión de $B(x)$, si existen. (4 puntos)

SOLUCIÓN.

a) Se tiene: $B(100) = 50 \Rightarrow 50 = 100a + 10b$ (*)

Como, además, es el máximo: $B'(100) = 0$.

Se tiene: $B'(x) = a + \frac{b}{2\sqrt{x}} \Rightarrow B'(100) = a + \frac{b}{20} = 0 \Rightarrow 20a + b = 0$ (*)

De las ecuaciones (*) se obtiene: $\begin{cases} 100a + 10b = 50 \\ 20a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10a + b = 5 \\ 20a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2} \text{ y } b = 10$

b) La función es: $B(x) = -x + 16\sqrt{x}$. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento dependen del signo de la

primera derivada: $B'(x) = -1 + \frac{16}{2\sqrt{x}} = -1 + \frac{8}{\sqrt{x}}$.

Igualemos a cero la derivada: $-1 + \frac{8}{\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow -\sqrt{x} + 8 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 8 \Rightarrow x = 64$. Se tiene:

$$\begin{array}{c} f' > 0 \qquad \qquad f' < 0 \\ \hline \qquad \qquad \qquad | \qquad \qquad \qquad \\ \qquad \qquad \qquad 64 \end{array}$$

Es decir, la función beneficio es creciente (aumenta) hasta $x = 64$ y es decreciente (disminuye) desde $x = 64$.

Los puntos de inflexión satisfacen $B''(x) = 0$. En nuestro caso: $B''(x) = 0 + \frac{-8 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{-4}{x\sqrt{x}}$ que es distinto de 0 para todo valor de x . Por tanto, la función no tiene puntos de inflexión.

3. En una gran ciudad la desviación típica del gasto medio semanal de los jóvenes es de 6 euros. Elegidos 100 jóvenes, su gasto medio semanal es de 25 euros. Determine el intervalo de confianza del 95% para dicho gasto medio, explicando los pasos realizados para obtener el resultado. (10 puntos)

SOLUCIÓN.

El radio del intervalo es $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Para un nivel de confianza del 95%, el valor crítico es $z_{\alpha/2} = 1,96$. En este caso: $\sigma = 6$ y $n = 100$ por lo que:

$$E = 1,96 \cdot \frac{6}{\sqrt{100}} = 1,176.$$

Y, por tanto, el intervalo de confianza es: $(25 - 1,176, 25 + 1,176) = (23,824, 26,176)$, es decir, en un 95% de las muestras, el gasto medio estará entre 23,82 euros y 26,18 euros.