Septiembre 2007

OPCIÓN A

1. *A primera hora de la mañana en un cajero automático se desea que haya 800 billetes (de 10, 20 y 50 euros) con un valor total de 16000 euros. Sabiendo que pos cada 3 billetes de 50 euros son necesarios 4 de 20, plantee un sistema de ecuaciones lineales para averiguar cuántos billetes de cada cantidad ha de haber y resuélvalo por el método de Gauss.* *(3,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Sea *x* el número de billetes de 10 €, *y* el de billetes de 20 € y *z* el de billetes de 50 €. Se tiene:

$$\left.\begin{array}{c} x+y+z=800 \\ 10x+20y+50z=16000 \\ \dfrac{z}{y}=\dfrac{3}{4} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} x+y+z=800 \\ x+2y+5z=1600 \\ 3y-4z=0 \end{array}\right\} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{array}{c} x+y+z=800 \\ y+4z=800 \\ 3y-4z=0 \end{array}\right\} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{array}{c} x+y+z=800 \\ y+4z=800 \\ -16z=-2400 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Transformaciones elementales utilizadas: (1) E_2 ! E_1 (2) E_3 ! $3E_2$

$z=150$; $y=200$; $z=450$ es decir, habrá 450 billetes de 10 €, 200 billetes de 20 € y 150 billetes de 50 €.

2. a) *Derive las funciones* $f(x)=\dfrac{x^2}{3x^2+1}$, $g(x)=x\left(5-x^2\right)^4$, $h(x)=5\sqrt{\ln x}$ *(1,5 puntos)*

b) *La oferta de un bien conocido su precio, p, es* $S(p)=\begin{cases} 30p+200 & \text{si } 0\le p\le 10 \\ p^2-60p+1000 & \text{si } 10<p\le 40 \end{cases}$. *Represéntela y a la vista de su gráfica, diga para qué valor del precio se alcanza la máxima y la mínima oferta y para cuáles la oferta es menor que 200 unidades.* *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $f'(x)=\dfrac{2x\cdot\left(3x^2+1\right)-x^2\cdot 6x}{\left(3x^2+1\right)^2}=\dfrac{6x^3+2x-6x^3}{\left(3x^2+1\right)^2}=\dfrac{2x}{\left(3x^2+1\right)^2}$

$g'(x)=\left(5-x^2\right)^4+x\cdot 4\left(5-x^2\right)^3\cdot(-2x)=\left(5-x^2\right)^4-8x^2\left(5-x^2\right)^3=\left(5-x^2\right)^3\cdot\left(5-x^2-8x^2\right)=\left(5-x^2\right)^3\cdot\left(5-9x^2\right)$

$h'(x)=5\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2x\sqrt{\ln x}}$

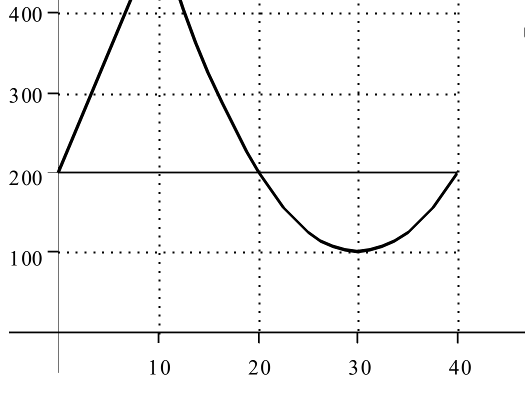
b) En el intervalo $[0\,,10]$ la función es una recta, $S(p)=30p+200$, que pasa por los puntos: $(0\,,\,200)$ y $(10\,,\,500)$

En el intervalo $(10\,,\,40]$ la función es una parábola: $S(p)=p^2-60p+1000$. Calculemos su vértice:

$S'(p)=2p-60=0 \Rightarrow p=30$, $S(30)=100 \Rightarrow V(30\,,100)$.

Además pasa por los puntos: $(20\,,200)$ y $(40\,,200)$.

La gráfica es entonces (ver dibujo a la derecha):



La máxima oferta se alcanza para un precio de 10 u y la mínima para un precio de 30 u.

La oferta es menor que 200 unidades para un precio comprendido entre 20 y 40 unidades monetarias.

3. *En un barrio hay dos institutos, en el primero el 60% de los alumnos estudia inglés y en el segundo el 45% no lo estudia. Se sortea un viaje a Londres en cada uno de los institutos, calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:*

a) Los dos alumnos agraciados no estudian inglés. (1 punto)
b) Sólo estudia inglés el del primer instituto. (1 punto)
c) Al menos uno estudia inglés. (1 punto)

SOLUCIÓN.

Sea I_1 el suceso "el alumno del primer instituto estudia inglés" e I_2 el suceso "el alumno del segundo instituto estudia inglés". Se tiene: $p\left(I_1\right)=0,6$ y $p\left(I_2\right)=0,55$ y ambos sucesos son independientes.

a) $p\left(\overline{I_1} \cap \overline{I_2}\right)=p\left(\overline{I_1}\right)\cdot p\left(\overline{I_2}\right)=0,4\cdot 0,45=0,18$

b) $p\left(I_1 \cap \overline{I_2}\right)=p\left(I_1\right)\cdot p\left(\overline{I_2}\right)=0,6\cdot 0,45=0,27$

c) El suceso "al menos uno estudia inglés" es el contrario del suceso "ninguno estudia inglés" cuya probabilidad se ha obtenido en el apartado a). Por tanto: $p=1-0,18=0,82$

OPCIÓN B

1. *Un camionero transporta dos tipos de mercancías, X e Y, ganando 60 y 50 euros por tonelada respectivamente. Al menos debe transportar 8 toneladas de X y como mucho el doble de cantidad que de Y. ¿A cuánto asciende su ganancia total máxima si dispone de un camión que puede transportar hasta 30 toneladas?* *(3,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Organicemos los datos del problema en una tabla:

Tipo de mercancía	Nº de toneladas	Ganancias
X	x	60x
Y	y	50y
	$x\geq 8$ $x\leq 2y$ $x+y\leq 30$	$F(x,y)=60x+50y$

X La función objetivo, que debe ser máxima, es:

$$F(x\,,\,y)=60x+50y$$

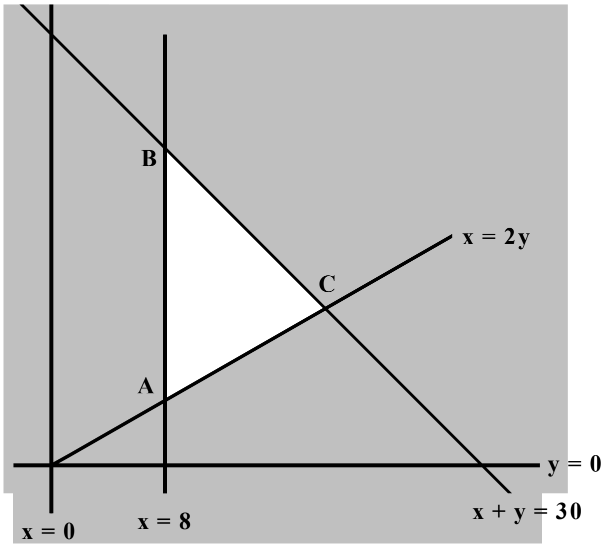
X Las restricciones son:

$$\left\{\begin{array}{l} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ x\geq 8 \\ x\leq 2y \\ x+y\leq 30 \end{array}\right.$$

X Dibujemos la región factible, es decir la solución del sistema de inecuaciones (en cada inecuación se ensombrece el semiplano que no es solución de la misma):

- El semiplano solución de la inecuación $x\geq 0$ está incluido en el semiplano solución de $x\geq 8$ que es el que se encuentra a la derecha de la recta $x=8$.
- El semiplano solución de la inecuación $y\geq 0$ es el que está por encima del eje de abscisas.
- El semiplano solución de la inecuación $x\leq 2y$ es el que contiene al punto $(0\,,1)$ por ejemplo.
- El semiplano solución de la inecuación $x+y\leq 30$ es al que pertenece el origen de coordenadas.

Por tanto, la región factible es el triángulo ABC:



La función objetivo se maximiza en alguno de los vértices de la región factible. Obtengamos pues las coordenadas de los vértices y el valor de la función objetivo en los mismos:

Vértice A:

$$\left.\begin{array}{l} x = 8 \\ x = 2y \end{array}\right\} \Rightarrow A\left(8\,,\,4\right) \Rightarrow F\left(8\,,\,4\right) = 680$$

Vértice B:

$$\left.\begin{array}{l} x = 8 \\ x + y = 30 \end{array}\right\} \Rightarrow B\left(8\,,\,22\right) \Rightarrow F\left(8\,,\,22\right) = 1580$$

Vértice C:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2y \\ x + y = 30 \end{array}\right\} \Rightarrow C\left(20\,,10\right) \Rightarrow F\left(20\,,10\right) = 1700$$

Es decir, la ganancia total máxima es de 1700 euros que conseguirá transportando 20 toneladas de X y 10 toneladas de Y.

2. *a) Derive las funciones* $f(x) = \dfrac{x}{6} - 8x^2 + \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{x}{\ln x}$, $h(x) = x\,e^{3x}$ *(1,5 puntos)*

b) Razone a qué es igual el dominio de la función f(x) y calcule los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de dicha función. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $f'(x) = \dfrac{1}{6} - 16x - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 96x^3 - 6}{6x^2} = \dfrac{-96x^3 + x^2 - 6}{6x^2}$; $g'(x) = \dfrac{\ln x - x \cdot \dfrac{1}{x}}{\ln^2 x} = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$

$h'(x) = e^{3x} + x \cdot e^{3x} \cdot 3 = e^{3x}\left(3x + 1\right)$

b) X La función f(x) está formada por la suma de tres funciones más simples: $f_1(x) = \dfrac{x}{6}$, $f_2(x) = -8x^2$ y $f_3(x) = \dfrac{1}{x}$.
El dominio de las dos primeras es $\mathbb{R}$ y el de la tercera es $\mathbb{R} - \left\{0\right\}$. La función f(x) tiene por dominio la intersección de los dominios de las tres funciones y, por tanto, es: $\mathbb{R} - \left\{0\right\}$.

X Los intervalos de concavidad y convexidad dependen del signo de la segunda derivada: $f''(x) = -16 - \dfrac{-2x}{x^4} = \dfrac{2}{x^3} - 16$

$\dfrac{2}{x^3} - 16 = 0 \Rightarrow 2 - 16x^3 = 0 \Rightarrow x^3 = \dfrac{1}{8} \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$ luego la segunda derivada puede tener un cambio de signo en $x = \dfrac{1}{2}$. Como además en $x = 0$ la función no está definida, también debemos considerar la posibilidad de que haya en él un cambio de signo. En definitiva, tenemos:

f'' < 0	f'' > 0	f'' < 0
	0 1/2	

Por tanto, la función es convexa en $(-\infty\,,0)\cup\left(\dfrac{1}{2}\,,+\infty\right)$ y cóncava en $\left(0\,,\dfrac{1}{2}\right)$.

De los dos puntos donde la segunda derivada cambia el signo, el único que es un punto de inflexión es $x=\dfrac{1}{2}$ (la función pasa de cóncava a convexa). Aunque en $x=0$ también hay un cambio de signo de la segunda derivada, no se trata de un punto de inflexión de la función pues no pertenece al dominio de la misma.

3. *El número medio de veces que una persona de una determinada ciudad utiliza mensualmente el transporte público tiene una desviación típica igual a 20. Determine el número mínimo de personas que se han de elegir para obtener un intervalo en el que estará la media, con un nivel de confianza del 95% y con un radio no mayor que 1,4. Explique los pasos realizados para obtener el resultado. (3 puntos)*

SOLUCIÓN.

Se trata de hallar el tamaño de la muestra necesaria para estimar la media μ en una población cuya desviación típica es $\sigma=20$ con un error máximo admisible de $E=1,4$ y un nivel de confianza del 95%. Se tiene:

$$E=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\quad\Rightarrow\quad n=\left(\frac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2$$

Para un nivel de confianza del 95%, el valor crítico es $z_{\alpha/2}=1,96$ (se puede obtener también de la tabla) y por tanto:

$$n=\left(\frac{1,96\cdot 20}{1,4}\right)^2=784$$

Es decir, se necesita un mínimo de 784 personas para estimar la media en las condiciones fijadas.