

OPCIÓN A

1. a) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 4a & a^2 & 0 \\ 1-a & 0 & 1 \end{pmatrix}$, con a un parámetro real no nulo, compruebe que

$A^{-1} \cdot B = A$. (1,5 puntos)

b) Calcule el rango de la matriz $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \\ -5 & -10 & m \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro real m . (2 puntos)

SOLUCIÓN.

a) $A^{-1} \cdot B = A \Leftrightarrow A \cdot A^{-1} \cdot B = A \cdot A \Leftrightarrow B = A^2$ es decir, comprobar que $A^{-1} \cdot B = A$ es equivalente a comprobar que $A^2 = B$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 4a & a^2 & 0 \\ 1-a & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

b) $\text{rg} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \\ -5 & -10 & m \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{=} \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & m+5 \end{pmatrix} \stackrel{(2)}{=} \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & m+5 \end{pmatrix} \stackrel{(3)}{=} \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & m+15 \end{pmatrix}$

Transformaciones elementales utilizadas: (1) $F_2 + 3F_1, F_3 - 5F_1$ (2) $F_2 : 3$ (3) $F_3 + 5F_2$

- Se tiene entonces:
- Si $m \neq -15$: el rango de la matriz es 3
 - Si $m = -15$: el rango de la matriz es 2

2. a) Derive las funciones $f(x) = 2\sqrt{x} - \ln x$, $g(x) = \frac{6-x^5}{x^6}$, $h(x) = e^{x^3}$ (1,5 puntos)

b) Razone a qué es igual el dominio y calcule los valores de x , si existen, para los que $f(x)$ alcanza máximo o mínimo relativo. (2 puntos)

SOLUCIÓN.

a) $f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$

$$g'(x) = \frac{-5x^4 \cdot x^6 - (6-x^5) \cdot 6x^5}{x^{12}} = \frac{x^5 \cdot (-5x^5 - 36 + 6x^5)}{x^{12}} = \frac{x^5 - 36}{x^7}$$

$$h'(x) = 3x^2 \cdot e^{x^3}$$

b) • El dominio de $f(x)$ es \mathbb{R}^+ pues $\forall x > 0 \exists f(x)$ ya que existen \sqrt{x} y $\ln x$.

• Los puntos críticos (posibles extremos relativos) satisfacen la ecuación $f'(x) = 0$, es decir: $\sqrt{x} - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x - \sqrt{x} + 1}{x^2} = \frac{x - 2x + 2\sqrt{x}}{2x^2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} - x}{2x^2\sqrt{x}} \Rightarrow f''(1) = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow x = 1 \text{ es un punto de mínimo}$$

relativo.

3. Pilar y Carmen son aficionadas al tiro con arco. Pilar da en el blanco 3 de cada 5 veces y Carmen da en el blanco 5 de cada 8. Si ambas tiran al blanco a la vez, calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:

$A = \text{“únicamente Pilar ha dado en el blanco”}$, $B = \text{“ambas han dado en el blanco”}$, $C = \text{“al menos una ha dado en el blanco”}$. (3 puntos)

SOLUCIÓN.

Sean los sucesos: $P = \text{“Pilar da en el blanco”}$ y $Q = \text{“Carmen da en el blanco”}$. Ambos sucesos son independientes.

Se tiene:

- $p(A) = p(P \cap Q') = p(P) \cdot p(Q') = \frac{3}{5} \cdot \left(1 - \frac{5}{8}\right) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{40}$

- $p(B) = p(P \cap Q) = p(P) \cdot p(Q) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

- $p(C) = p(P \cup Q) = 1 - p(P' \cap Q') = 1 - p(P') \cdot p(Q') = 1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8} = 1 - \frac{3}{20} = \frac{17}{20}$

OPCIÓN B

1. Una empresa fabrica dos calidades de un bien, teniendo que producir en total un mínimo de 100 unidades y un máximo de 200. El coste de producción de una unidad de la primera calidad es de 15 euros y se obtiene un beneficio unitario de 100 euros. El coste de producción de una unidad de la segunda calidad es de 10 euros y se obtiene un beneficio unitario de 50 euros.

a) Plantee y resuelva un programa lineal para averiguar el coste total mínimo para obtenerse un beneficio total de al menos 12500 euros. (2 puntos)

b) Plantee y resuelva un programa lineal para averiguar el beneficio total máximo con un coste total no superior a 2550 euros. (1,5 puntos)

SOLUCIÓN.

Organicemos en una tabla los datos del problema:

	Número	Coste	Beneficio
Primera calidad	x	15x	100x
Segunda calidad	y	10y	50y
	$x + y \geq 100$	$F(x, y) = 15x + 10y$	$100x + 50y \geq 12500$
	$x + y \leq 200$	$15x + 10y \leq 2550$	$G(x, y) = 100x + 50y$

a) • Función objetivo: $F(x, y) = 15x + 10y$

- Restricciones:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 100 \\ x + y \leq 200 \\ 100x + 50y \geq 12500 \end{cases}$$

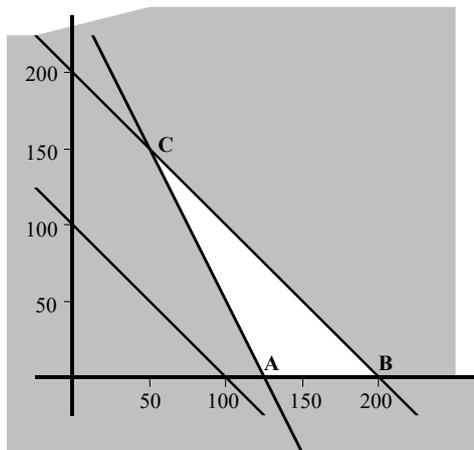
- Dibujemos la región factible:

La recta $x + y = 100$ pasa por los puntos (100, 0) y (0, 100) -por ejemplo- y la solución de la inecuación $x + y \geq 100$ es el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.

La recta $x + y = 200$ pasa por los puntos (200, 0) y (0, 200) -por ejemplo- y la solución de la inecuación $x + y \leq 200$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas.

La recta $100x + 50y = 12500$ pasa por los puntos $(100, 50)$ y $(50, 150)$ -por ejemplo- y la solución de la inecuación $100x + 50y \geq 12500$ es el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.

La región factible es el triángulo ABC cuyos vértices son: $A(125, 0)$, $B(200, 0)$ y $C(50, 150)$



La función objetivo se minimiza en alguno de los vértices de la región factible. Calculemos el valor de la función en cada uno de ellos:

$$F(125, 0) = 15 \cdot 125 + 10 \cdot 0 = 1875 \text{ €}$$

$$F(200, 0) = 15 \cdot 200 + 10 \cdot 0 = 3000 \text{ €}$$

$$F(50, 150) = 15 \cdot 50 + 10 \cdot 150 = 2250 \text{ €}$$

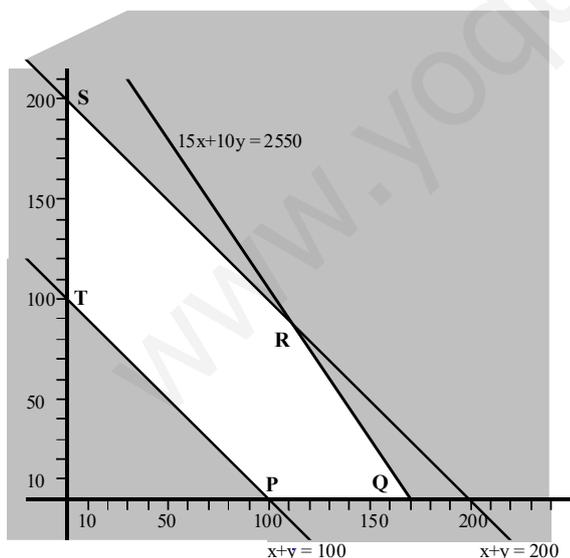
Por tanto, el coste mínimo es de 1875 € que se obtendrá produciendo 125 bienes de primera calidad y ninguno de segunda calidad.

b) Para maximizar el beneficio, la función objetivo es ahora: $G(x, y) = 100x + 50y$

$$\text{y las restricciones: } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 100 \\ x + y \leq 200 \\ 15x + 10y \leq 2550 \end{cases}$$

Dibujemos la región factible (conjunto solución del sistema de restricciones). La recta $15x + 10y = 2550$ pasa por los puntos $(150, 30)$ y $(50, 180)$ -por ejemplo- y la solución de la inecuación $15x + 10y \leq 2550$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas. La región factible es entonces el pentágono PQRST cuyos vértices son los puntos:

$$P(100, 0), Q(170, 0), R(110, 90), S(0, 200) \text{ y } T(0, 100).$$



El valor de la función objetivo en cada uno de los vértices es:

$$G(170, 0) = 17000 \text{ €} \quad ; \quad G(100, 0) = 10000 \text{ €}$$

$$G(110, 90) = 15500 \text{ €} \quad ; \quad G(0, 200) = 10000 \text{ €}$$

$$G(0, 100) = 5000 \text{ €}$$

Por tanto, el beneficio total máximo es de 17000 € que se obtiene produciendo 170 bienes de primera calidad

2. a) Derive las funciones $f(x) = \frac{x^3}{4} - 8$, $g(x) = \sqrt{x^3}$, $h(x) = x^2 - e^x$ (1,5 puntos)

b) Diga si la función $m(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ g(x) & \text{si } 4 < x \end{cases}$ es continua en $x = 4$ (0,75 puntos)

c) Escriba la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $m(x)$ en $x = 9$. (1,25 puntos)

SOLUCIÓN.

$$a) f'(x) = \frac{3}{4}x^2 \quad g'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{3x^2\sqrt{x}}{2x} = \frac{3}{2}x\sqrt{x} \quad h'(x) = 2x - e^x$$

$$b) m(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^3 - 8 & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ \sqrt{x^3} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

$$\bullet \exists m(4) = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} m(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{1}{4}x^3 - 8 \right) = 8$$

$$\bullet \exists \lim_{x \rightarrow 4} m(x):$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} m(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \left(\sqrt{x^3} \right) = \sqrt{64} = 8$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 4} m(x) = 8$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 4} m(x) = m(4) \Rightarrow \text{la función } m(x) \text{ es continua en } x = 4.$$

c) Para $x = 9$, $m(x) = \sqrt{x^3} \Rightarrow m(9) = \sqrt{9^3} = 27$ luego el punto de tangencia es el $(9, 27)$.

$$m'(x) = \frac{3}{2}x\sqrt{x} \text{ y la pendiente de la tangente es por tanto: } m'(9) = \frac{3}{2} \cdot 9 \cdot 3 = \frac{81}{2}$$

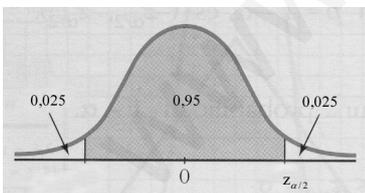
La ecuación de la tangente es entonces:

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0) \Rightarrow y - 27 = \frac{81}{2} \cdot (x - 9) \Leftrightarrow 2y - 54 = 81x - 729 \Leftrightarrow 81x - 2y - 675 = 0$$

3. En un gran supermercado se ha obtenido que el número medio de toneladas descargadas diariamente en los últimos 100 días ha sido igual a 10. Determine el intervalo, con un nivel de confianza del 95%, en el que estará la media si la desviación típica es igual a 6. Explique los pasos realizados para obtener el resultado. (3 puntos)

SOLUCIÓN.

El intervalo de confianza de la media de la población μ es $\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ donde $\bar{x} = 10$ es la media obtenida en la muestra, $\sigma = 6$ es la desviación típica y $n = 100$ es el tamaño de la muestra.



El valor crítico $z_{\alpha/2}$ correspondiente a un nivel de confianza del 95% es:

$$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \alpha/2 = 0,025$$

$$0,025 + 0,95 = 0,975 \text{ y en la tabla: } F(1,96) = 0,975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96.$$

Así pues, el intervalo de confianza pedido es:

$$\left(10 - 1,96 \cdot \frac{6}{10}, 10 + 1,96 \cdot \frac{6}{10} \right) = (10 - 1,176, 10 + 1,176) = (8,824, 11,176)$$