

CUESTIÓN A1: Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Calcule $A \cdot B$ (0,75 puntos)
b) Calcule la matriz inversa de B y utilícela para resolver la ecuación $X \cdot B = B + A$ (2,75 puntos)

SOLUCIÓN.

$$a) A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 7 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 3/2 & -1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 2/3 \end{array} \right) \xrightarrow{(4)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 2/3 \end{array} \right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Transformaciones elementales utilizadas: (1) $F_1 - F_3$ (2) $F_2 - 3F_1$; $F_3 - F_1$ (3) $F_2 : (-2)$; $F_3 : 3$ (4) $F_1 + 2F_3$; $F_2 + 3F_3$

$$X \cdot B = B + A \Rightarrow X = (B + A) \cdot B^{-1} = B \cdot B^{-1} + A \cdot B^{-1} = I + A \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2/3 & 0 & 7/3 \\ 7/6 & -1/2 & 7/6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 7/3 \\ 7/6 & 1/2 & 7/6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

CUESTIÓN A2: Un agricultor desea plantar 750 cerezos, 700 perales y 650 manzanos. En el vivero Agro ofrecen un lote de 15 cerezos, 30 perales y 10 manzanos por 700 euros y en el vivero Ceres el lote de 15 cerezos, 10 perales y 20 manzanos cuesta 650 euros.

- a) Plantee y resuelva un programa lineal para averiguar el número de lotes que ha de comprar en cada vivero para que pueda plantar los árboles que desea y para que el coste total de adquisición sea mínimo. (3 puntos)
b) ¿Utiliza el agricultor todos los árboles que ha adquirido?, en caso negativo diga cuántos no ha plantado y de qué tipo son. (0,5 puntos)

SOLUCIÓN.

Aunque en el enunciado no se explicita, debemos entender que el número de árboles de cada clase es el **mínimo** que el agricultor desea plantar.

Organicemos los datos del problema en una tabla:

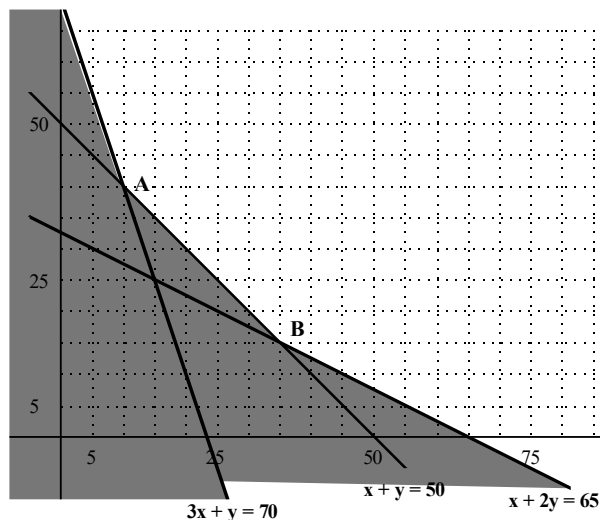
	nº de lotes	nº cerezos	nº perales	nº manzanos	Precio
AGRO	x	15x	30x	10x	700x
CERES	y	15y	10y	20y	650y
	≥ 0	≥ 750	≥ 700	≥ 650	$F(x, y)$

a) La función objetivo, que en este caso debe ser mínima, es: $F(x, y) = 700x + 650y$

Las restricciones a que deben someterse la solución del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 15x + 15y \geq 750 \\ 30x + 10y \geq 700 \\ 10x + 20y \geq 650 \end{cases}$$

Dibujemos la región factible:



X La recta $x = 0$ es el eje de ordenadas y el semiplano solución de $x \geq 0$ es el de la derecha.

X La recta $y = 0$ es el eje de abscisas y el semiplano solución de $y \geq 0$ es el superior.

X La recta $15x + 15y = 750 \Leftrightarrow x + y = 50$ pasa por los puntos $(50, 0)$ y $(0, 50)$. La solución de la inecuación $15x + 15y \geq 750$ es el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.

X La recta $30x + 10y = 700 \Leftrightarrow 3x + y = 70$ pasa por los puntos $(10, 40)$ y $(20, 10)$. La solución de la inecuación $30x + 10y \geq 700$ es el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.

Por tanto, la región factible es una región abierta con dos vértices: A y B. Obtengamos sus coordenadas:

X La recta $10x + 20y = 650 \Leftrightarrow x + 2y = 65$ pasa por los puntos $(65, 0)$ y $(5, 30)$. La solución de la inecuación $10x + 20y \geq 650$ es el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.

Por tanto, la región factible es una región abierta con dos vértices: A y B. Obtengamos sus coordenadas:

Vértice A: $\begin{cases} x + y = 50 \\ 3x + y = 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y = -50 \\ 3x + y = 70 \end{cases} \Rightarrow 2x = 20 \Rightarrow x = 10, y = 40 \Rightarrow A(10, 40)$

Vértice B: $\begin{cases} x + y = 50 \\ x + 2y = 65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y = -50 \\ x + 2y = 65 \end{cases} \Rightarrow y = 15, x = 35 \Rightarrow B(35, 15)$

Veamos en cuál de los vértices de la región factible es mínima la función objetivo:

$$F(10, 40) = 700 \cdot 10 + 650 \cdot 40 = 33000$$

$$F(35, 15) = 700 \cdot 35 + 650 \cdot 15 = 34250$$

$\Rightarrow$ El precio es mínimo con 10 lotes de Agro y 40 de Ceres.

b) El número de cerezos comprados es: $15 \cdot 10 + 15 \cdot 40 = 750$ luego utiliza todos.

El número de perales comprados es: $30 \cdot 10 + 10 \cdot 40 = 700$ luego también utiliza todos los perales comprados.

El número de manzanos comprados es: $10 \cdot 10 + 20 \cdot 40 = 900$ luego deja de utilizar 250 manzanos.

CUESTIÓN B1: a) Derive las funciones $f(x) = x^2 \cdot \ln(1-x)$, $g(x) = \frac{x^2}{8} - \frac{8}{x^2}$, $h(x) = 2^{2x-1}$ (1,5 puntos)

b) La velocidad (en metros/minuto) de un juguete viene dada por $V(t) = \begin{cases} 10t - t^2 & \text{si } t \in [0, 2] \cup [8, 10] \\ 16 & \text{si } t \in (2, 8) \end{cases}$, siendo la variable t el número de minutos transcurrido desde que se pone en marcha.

b₁) Represente la función velocidad. (0,75 puntos)

b₂) A la vista de la gráfica, diga cuál es la velocidad máxima y en qué momento o momentos se alcanza.

(0,5 puntos)

b₃) Calcule la velocidad del juguete pasados 30 segundos desde su puesta en marcha. ¿Hay algún otro momento en el que lleva la misma velocidad?, en caso afirmativo, diga en cuál. (0,75 puntos)

SOLUCIÓN.

$$a) \quad f'(x) = 2x \cdot \ln(1-x) + x^2 \cdot \frac{1}{1-x} \cdot (-1) = 2x \cdot \ln(1-x) - \frac{x^2}{1-x}$$

$$g(x) = \frac{1}{8}x^2 - 8x^{-2} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{4}x + 16x^{-3} = \frac{x}{4} + \frac{16}{x^3}$$

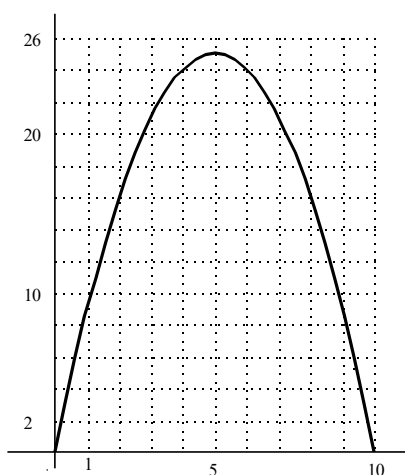
$$h'(x) = 2^{2x-1} \cdot 2 \cdot \ln 2$$

b) La función tiempo – velocidad es una función definida a trozos formada por una parábola y una función constante.

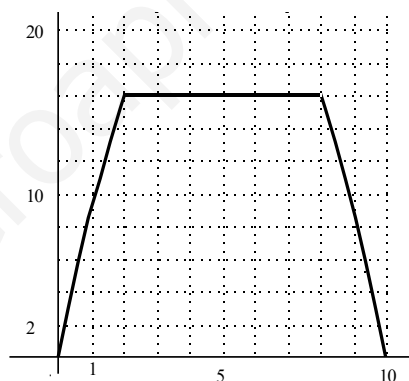
b₁) Representemos la función $V(t) = 10t - t^2$ en los intervalos en que está definida.

$$V'(t) = 10 - 2t = 0 \Rightarrow t = 5 \quad \text{y como } V''(t) = -2 \Rightarrow \text{En } t = 5 \text{ la función tiene un máximo en } (5, 25).$$

Como además pasa por los puntos $(0, 0)$ y $(10, 0)$, la gráfica es:



Considerando la parábola en los intervalos $[0, 2]$ y $[8, 10]$ y la función constante $V(t) = 16$ en $(2, 8)$:



b₂) La velocidad máxima es de 16 m/min y se alcanza entre los minutos 2 y 8.

$$b_3) \text{ A los 30 segundos, } t = 0,5 \text{ min} \Rightarrow V(0,5) = 10 \cdot 0,5 - (0,5)^2 = 4,75 \text{ m/min}.$$

Dada la simetría de la parábola, volverá a tener la misma velocidad a los 9 min. 30 seg.

CUESTIÓN B2: a) Derive las funciones $f(x) = 7x - x^2 + \frac{9}{x}$, $g(x) = (1-x)^2 \cdot e^x$, $h(x) = \frac{1}{(x+1)^{20}}$

(1,5 puntos)

b) Razone a qué es igual el dominio de la función $f(x)$ del apartado anterior, y diga los puntos en los que alcanza máximo o mínimo relativo. (2 puntos)

SOLUCIÓN.

$$a) \quad f'(x) = 7 - 2x - \frac{9}{x^2}$$

$$g'(x) = 2(1-x)(-1) \cdot e^x + (1-x)^2 \cdot e^x = (1-x) \cdot e^x \cdot (-2+1-x) = (1-x) \cdot e^x \cdot (-1-x) = (x^2 - 1) \cdot e^x$$

$$h(x) = (x+1)^{-20} \Rightarrow h'(x) = -20 \cdot (x+1)^{-21} = -\frac{20}{(x+1)^{21}}$$

b) El dominio de $f(x)$ es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ porque para $x=0$ no es calculable el sumando $\frac{9}{x}$ y por tanto no existe $f(0)$.

Calculemos los puntos de máximo o de mínimo de la función $f(x)$:

$$f'(x) = 7 - 2x - \frac{9}{x^2} = 0 \Rightarrow 7x^2 - 2x^3 - 9 = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 7x^2 + 9 = 0.$$

Busquemos la primera raíz por la regla de Ruffini:

1	2	-7	0	9
	2	-9	9	9
	2	-9	9	0

luego $x = -1$ es una primera solución de la ecuación $f'(x) = 0$. Otras posibles soluciones son:

$$2x^2 - 9x + 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{4} = \frac{9 \pm 3}{4} = \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Tenemos entonces tres puntos críticos. Comprobemos si se trata de máximos o de mínimos:

$$f''(x) = -2 - \frac{9 \cdot 2x}{x^4} = -2 + \frac{18}{x^3}$$

$$f''(-1) = -2 - 18 < 0 \Rightarrow \text{En } x = -1 \text{ la función tiene un máximo relativo.}$$

$$f''(3) = -2 + \frac{18}{27} < 0 \Rightarrow \text{En } x = 3 \text{ la función tiene un máximo relativo.}$$

$$f''\left(\frac{3}{2}\right) = -2 + \frac{18}{\frac{27}{8}} = -2 + \frac{144}{27} > 0 \Rightarrow \text{En } x = \frac{3}{2} \text{ tiene un mínimo relativo.}$$

CUESTIÓN C1: Se tienen dos urnas A y B. En la primera hay 2 bolas blancas, 3 negras y 1 roja y en la segunda hay 3 bolas blancas, 1 negra y 1 verde.

a) Se extrae una bola de cada urna, calcule la probabilidad de que ambas sean del mismo color. (1,5 puntos)

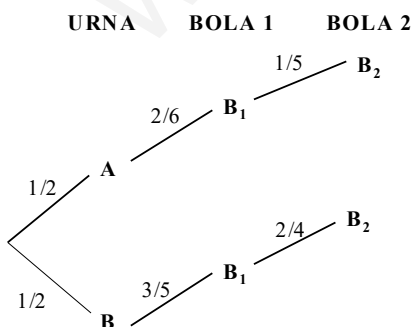
b) Se lanza una moneda, si se obtiene cara se extraen dos bolas de la urna A y si se obtiene cruz se extraen dos bolas de la urna B, calcule la probabilidad de que ambas bolas sean blancas. (1,5 puntos)

SOLUCIÓN.

a) Sean los sucesos: B_1 = "la bola extraída de la urna A es blanca", B_2 = "la bola extraída de la urna B es blanca", N_1 = "la bola extraída de la urna A es negra" y N_2 = "la bola extraída de la urna B es negra".

$$\begin{aligned} \text{Se tiene: } p[(B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap N_2)] &= p(B_1 \cap B_2) + p(N_1 \cap N_2) = p(B_1) \cdot p(B_2) + p(N_1) \cdot p(N_2) = \\ &= \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{6}{30} + \frac{3}{30} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10} = 0,3 \end{aligned}$$

b) Organicemos los casos que pueden presentarse en un diagrama en árbol:



$$\text{Se tiene: } p(B_1 \cap B_2) =$$

$$= p(A) \cdot p(B_1 / A) \cdot p(B_2 / A \cap B_1) + p(B) \cdot p(B_1 / B) \cdot p(B_2 / B \cap B_1) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{30} + \frac{3}{20} = \frac{11}{60} = 0,18$$

CUESTIÓN C2: La vida media de un determinado modelo de bombilla sigue una distribución normal con desviación típica igual a 60 días. Elegida una muestra y con un nivel de confianza del 98% se obtiene el intervalo $(388'68, 407'32)$ para la vida media. Calcule la media y el tamaño de la muestra elegida. Detalle los pasos realizados para obtener los resultados. (3 puntos)

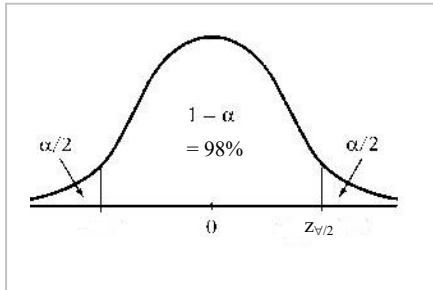
NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en caso de que los valores por exceso o por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIÓN.

La vida media en la muestra ocupa el centro del intervalo de confianza: $\bar{X} = \frac{388'68 + 407'32}{2} = 398$ horas

El error máximo admisible es $E = 407'32 - 398 = 9,32$ y la desviación típica poblacional $\sigma = 60$ horas.

Obtenemos el valor crítico correspondiente a un nivel de confianza del 98%:



$$1 - \alpha = 0,98 \Rightarrow \alpha = 0,02 \Rightarrow \alpha/2 = 0,01 \Rightarrow$$

$\Rightarrow P(z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - 0,01 = 0,99$ y buscando en la tabla de la normal $N(0, 1)$ el valor más próximo que encontramos es 0,9901 al que corresponde un valor crítico: $z_{\alpha/2} = 2,33$

Tenemos entonces: $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \right)^2 = \left(\frac{2,33 \cdot 60}{9,32} \right)^2 = 225$ luego la muestra elegida ha sido de 225 bombillas.