

Desarrolle clara y razonadamente tres cuestiones, eligiendo una del par (A1, A2), otra de (B1, B2) y otra de (C1, C2).

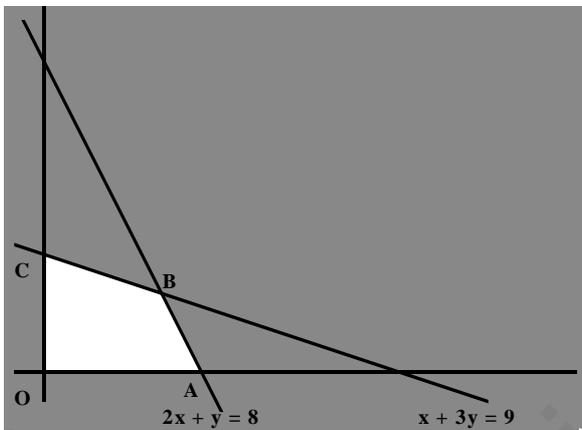
CUESTIÓN A1:

Sea $T = \{ (x, y) \mid x + 3y \leq 9, 2x + y \leq 8, x \geq 0, y \geq 0 \}$

- a) Represente gráficamente el conjunto T. [1 punto]
- b) Consideramos la función $f(x, y) = 3x + 3y$. Calcular, si existen, los puntos del conjunto T que dan el valor máximo y el valor mínimo de la función. [1,75 puntos]
- c) ¿Cuál sería la respuesta al apartado anterior si eliminamos en el conjunto T la restricción $y \geq 0$? [0,75 puntos]

SOLUCIÓN.

- a) La recta $x + 3y = 9$ pasa por los puntos $(9, 0)$ y $(0, 3)$. El semiplano solución de la inecuación es el que contiene al origen de coordenadas.



La recta $2x + y = 8$ pasa por los puntos $(4, 0)$ y $(0, 8)$. El semiplano solución de la inecuación es el que contiene al origen de coordenadas.

La recta $x = 0$ es el eje de ordenadas. La solución de la inecuación $x \geq 0$ es el semiplano de la derecha.

La recta $y = 0$ es el eje de abscisas. La solución de la inecuación $y \geq 0$ es el semiplano superior.

El conjunto T es el cuadrilátero OABC (en blanco).

- b) La función objetivo se maximiza o minimiza en los vértices de T.

La $O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 0$

La $A(4, 0) \Rightarrow f(4, 0) = 12$

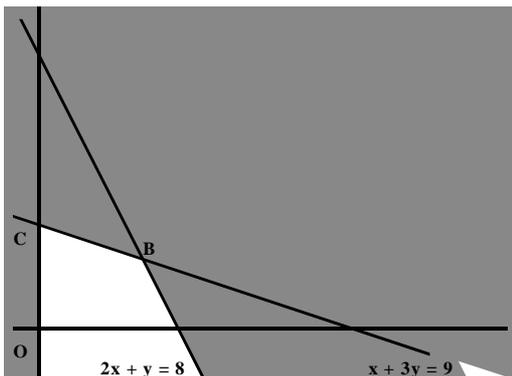
La $B(3, 2) \Rightarrow f(3, 2) = 15$

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + 3y = 9 \end{cases} \Rightarrow y = 8 - 2x \Rightarrow x + 24 - 6x = 9 \Rightarrow 5x = 15 \Rightarrow x = 3, y = 2 \Rightarrow B(3, 2)$$

La $C(0, 3) \Rightarrow f(0, 3) = 9$

Luego la función $f(x, y)$ es máxima en $B(3, 2)$ y es mínima en $O(0, 0)$.

- c) Si eliminamos la restricción $y \geq 0$, el conjunto T es ahora una región abierta que seguirá alcanzando su máximo en el vértice $B(3, 2)$ pero no alcanzará un mínimo.



CUESTIÓN A2:

Una tienda posee tres tipos de conservas A, B, C. El precio medio de las tres conservas es de 1 €. Un cliente compra 30 unidades de A, 20 de B y 10 de C, pagando por ello 60 €. Otro compra 20 unidades de A y 25 de C y paga por ello 45 €.

a) Plantee un sistema de ecuaciones lineales para calcular el precio de cada una de las conservas y resuélvalo por el método de Gauss. [2,5 puntos]

b) ¿Es posible determinar el precio de cada una de las conservas si cambiamos la tercera condición por "otro cliente compra 20 unidades de A y 10 de B, pagando por ello 30 €"? [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) Sea x el precio unitario de A, y el de B y z el de C. Se tiene:

$$\begin{cases} \frac{x+y+z}{3} = 1 \\ 30x+20y+10z = 60 \\ 20x+25z = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = 3 \\ 3x+2y+z = 6 \\ 4x+5z = 9 \end{cases} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y+z = 3 \\ -y-2z = -3 \\ -4y+z = -3 \end{cases} \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y+z = 3 \\ y+2z = 3 \\ 9z = 9 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow z = 1, y = 1, x = 1$ Transformaciones elementales utilizadas: (1) $F_2 - 3F_1$; $F_3 - 4F_1$
(2) $F_3 - 4F_2$

b) El sistema será ahora:

$$\begin{cases} \frac{x+y+z}{3} = 1 \\ 30x+20y+10z = 60 \\ 20x+10y = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = 3 \\ 3x+2y+z = 6 \\ 2x+y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = 3 \\ -y-2z = -3 \\ -y-2z = -3 \end{cases} \text{ que es}$$

un sistema compatible indeterminado por lo que no será posible determinar el precio de cada conserva.

CUESTIÓN B1:

a) Derive las funciones $f(x) = 4\sqrt{x} - \ln x^2$, $g(x) = (x-1)e^{x^2}$, $h(x) = \frac{x^6}{3-x^3}$ [1,5 puntos]

b) Razone a qué es igual el dominio y calcule los valores de x , si existen, para los que la función $f(x)$ del apartado anterior, alcanza máximo o mínimo relativo. [2 puntos]

SOLUCIÓN.

a) $\text{C } f'(x) = \frac{4}{2\sqrt{x}} - \frac{2x}{x^2} = \frac{2\sqrt{x}}{x} - \frac{2}{x} = \frac{2\sqrt{x}-2}{x}$

$\text{C } g'(x) = e^{x^2} + (x-1)e^{x^2} \cdot 2x = e^{x^2} (1+2x^2-2x)$

$\text{C } h'(x) = \frac{6x^5(3-x^3) - x^6(-3x^2)}{(3-x^3)^2} = \frac{18x^5 - 6x^8 + 3x^8}{(3-x^3)^2} = \frac{18x^5 - 3x^8}{(3-x^3)^2} = \frac{3x^5(6-x^3)}{(3-x^3)^2}$

b) La función es la diferencia de dos funciones: $f_1(x) = 4\sqrt{x}$ cuyo dominio es $[0, \infty)$ y $f_2(x) = \ln x^2$ cuyo dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$. El dominio de $f(x)$ es la intersección de ambos dominios y por tanto $D(f) = (0, \infty)$

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{x}-2}{x} = 0 \Rightarrow 2\sqrt{x}-2=0 \Rightarrow \sqrt{x}=1 \Rightarrow x=1 \text{ (valor crítico)}$$

$$f''(x) = \frac{2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x - (2\sqrt{x}-2)}{x^2} = \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 2}{x^2} = \frac{-\sqrt{x} + 2}{x^2} \Rightarrow f''(1) > 0 \Rightarrow x=1 \text{ es un mínimo relativo}$$

CUESTIÓN B2:

a) Derive las funciones $f(x) = \ln \sqrt{x}$, $g(x) = x^2(5-x^3)$, $h(x) = 3^{5x-1}$ [1,5 puntos]

b) La demanda de un bien conocido su precio, p , viene dada por $D(p) = \begin{cases} 40p - p^2 & \text{si } 20 \leq p \leq 30 \\ 600 - 10p & \text{si } 30 < p \leq 40 \end{cases}$

Represéntela. A la vista de su gráfica diga para qué valor del precio se alcanza la máxima y la mínima demanda y para cuáles la demanda es mayor que 375 unidades. [2 puntos]

SOLUCIÓN.

a) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$

$g(x) = 5x^2 - x^5 \Rightarrow g'(x) = 10x - 5x^4$

$h'(x) = 3^{5x-1} \cdot 5 \cdot \ln 3$

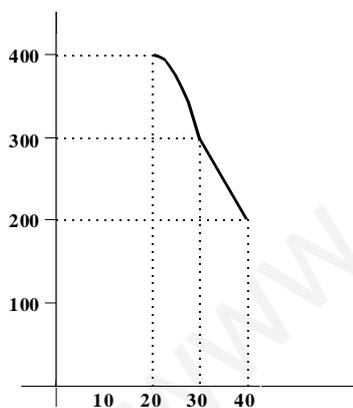
b) La función $D(p) = 40p - p^2$ definida en $[20, 30]$ es una parábola que corta al eje de abscisas en los puntos:

$40p - p^2 = 0 \Rightarrow p(40 - p) = 0 \Rightarrow p = 0, p = 40 \Rightarrow (0, 0) \text{ y } (40, 0)$

Su vértice está en: $D'(p) = 40 - 2p = 0 \Rightarrow p = 20 \Rightarrow (20, 400)$ y como $D''(p) = -2 < 0 \Rightarrow$ se trata de un máximo.

La función $D(p) = 600 - 10p$ definida en $(30, 40]$ es una recta que pasa por los puntos $(30, 300)$ y $(40, 200)$.

Considerando los intervalos en que están definidas cada una de las funciones, la gráfica es:



A la vista de la gráfica, la máxima demanda se tiene para un precio de 20 unidades monetarias y la mínima demanda para 40 unidades monetarias.

Veamos el precio para el que la demanda es de al menos 375 unidades:

$375 = 40p - p^2 \Rightarrow p^2 - 40p + 375 = 0 \Rightarrow p = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 1500}}{2} = \frac{40 \pm 10}{2} =$

$= \begin{cases} 25 \\ 15 \end{cases}$

Puesto que $p = 15$ está fuera del intervalo en que está definida la función, el valor útil es $p = 25$ y, por tanto, la demanda se mantiene por encima de 375 unidades para un precio $p \in (20, 25)$.

CUESTIÓN C1:

Una urna contiene 10 bolas blancas, 6 bolas negras y 4 bolas verdes. Se extraen al azar 3 bolas sin reposición.

- a) Calcule la probabilidad de que salgan todas las bolas del mismo color. [1 punto]
b) Calcule la probabilidad de que salgan más bolas blancas o verdes. [1 punto]
c) Calcule la probabilidad de que dos bolas sean blancas y una verde. [1 punto]

SOLUCIÓN.

$$\begin{aligned} \text{a) } p[(B_1 \cap B_2 \cap B_3) \cup (N_1 \cap N_2 \cap N_3) \cup (V_1 \cap V_2 \cap V_3)] &= \\ &= p(B_1) \cdot p(B_2 / B_1) \cdot p(B_3 / B_1 \cap B_2) + p(N_1) \cdot p(N_2 / N_1) \cdot p(N_3 / N_1 \cap N_2) + p(V_1) \cdot p(V_2 / V_1) \cdot p(V_3 / V_1 \cap V_2) = \\ &= \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{8}{18} + \frac{6}{20} \cdot \frac{5}{19} \cdot \frac{4}{18} + \frac{4}{20} \cdot \frac{3}{19} \cdot \frac{2}{18} = \frac{720 + 120 + 24}{6840} = \frac{864}{6840} = 0,1263 \end{aligned}$$

- b) Sea H el suceso "sacar una bola blanca o verde, cuya probabilidad es $p(H) = \frac{14}{20}$. Se tiene:

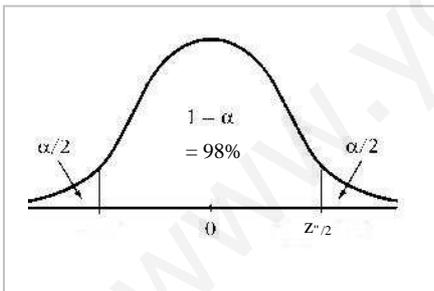
$$\begin{aligned} p &= p(H_1 \cap H_2 \cap H_3) + p(H_1 \cap H_2 \cap N_3) + p(H_1 \cap N_2 \cap H_3) + p(N_1 \cap H_2 \cap H_3) = \\ &= \frac{14}{20} \cdot \frac{13}{19} \cdot \frac{12}{18} + \frac{14}{20} \cdot \frac{13}{19} \cdot \frac{6}{18} + \frac{14}{20} \cdot \frac{6}{19} \cdot \frac{13}{18} + \frac{6}{20} \cdot \frac{14}{19} \cdot \frac{13}{18} = \frac{2184}{6840} + 3 \cdot \frac{1092}{6840} = \frac{5460}{6840} = 0,7982 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } p[2B \cap 1V] &= p(B_1 \cap B_2 \cap V_3) + p(B_1 \cap V_2 \cap B_3) + p(V_1 \cap B_2 \cap B_3) = \\ &= \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{4}{18} + \frac{10}{20} \cdot \frac{4}{19} \cdot \frac{9}{18} + \frac{4}{20} \cdot \frac{10}{19} \cdot \frac{9}{18} = \frac{3 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 4}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{1080}{6840} = 0,1579 \end{aligned}$$

CUESTIÓN C2:

El peso medio de 700 adultos de una determinada población es de 80 kg. Determine el intervalo, con un nivel de confianza del 98%, en el que estará la media si la desviación típica es igual a 15. Detalle los pasos realizados para obtener los resultados. [3 puntos]

SOLUCIÓN.



El radio del intervalo de confianza de la media es: $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

donde $z_{\alpha/2}$ es el valor crítico correspondiente al nivel de confianza del 98%, $\sigma = 15$ es la desviación típica poblacional y $n = 700$ es el número de individuos de la muestra.

Obtengamos a partir de la tabla, el valor de $z_{\alpha/2}$:

$$1 - \alpha = 0,98 \Rightarrow \alpha = 1 - 0,98 = 0,02 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,01 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,99$$

En la tabla encontramos: $p(z \leq z_{\alpha/2}) = 0,99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,33$

Por tanto $E = 2,33 \cdot \frac{15}{\sqrt{700}} = 1,32$ y el intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - E, \bar{x} + E) = (80 - 1,32, 80 + 1,32) = (78,68, 81,32)$$

www.yoquieroaprobar.es