Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3,5 puntos)*

a) *(2,5 puntos)* Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&-1&0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\0&1\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix},\qquad D=\begin{pmatrix}1&8\\0&5\end{pmatrix}$$

Encontrar, si existe, una matriz X tal que se verifique:

$$AB+2CX=D$$

b) *(1 punto)* Encontrar el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&-1&1\\1&-1&5\end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN.

a) $AB+2CX=D \;\Rightarrow\; 2CX=D-AB \;\Rightarrow\; X=(2C)^{-1}(D-AB)$

$$AB=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&1\\-1&-1\end{pmatrix}\quad;\quad D-AB=\begin{pmatrix}1&8\\0&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&1\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&7\\1&6\end{pmatrix}\quad;\quad 2C=\begin{pmatrix}4&6\\2&8\end{pmatrix}$$

$$(2C)^{-1}:\left(\begin{array}{cc|cc}4&6&1&0\\2&8&0&1\end{array}\right)\overset{\substack{F_2:2\\F_1\leftrightarrow F_2}}{\sim}\left(\begin{array}{cc|cc}1&4&0&1/2\\4&6&1&0\end{array}\right)\overset{F_2-4F_1}{\sim}\left(\begin{array}{cc|cc}1&4&0&1/2\\0&-10&1&-2\end{array}\right)\overset{F_2:(-10)}{\sim}\left(\begin{array}{cc|cc}1&4&0&1/2\\0&1&-1/10&1/5\end{array}\right)\overset{F_1-4F_2}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&2/5&-3/10\\0&1&-1/10&1/5\end{array}\right)\;\Rightarrow\;(2C)^{-1}=\begin{pmatrix}2/5&-3/10\\-1/10&1/5\end{pmatrix}$$

Por tanto: $$X=\begin{pmatrix}2/5&-3/10\\-1/10&1/5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3&7\\1&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3/2&1\\1/2&1/2\end{pmatrix}$$

b) Utilizamos el método de Gauss:

$$\text{rg}\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&-1&1\\1&-1&5\end{pmatrix}\overset{\substack{F_2+F_1\\F_3-F_1}}{=}\text{rg}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&3\\0&-1&3\end{pmatrix}\overset{F_3-F_2}{=}\text{rg}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&3\\0&0&0\end{pmatrix}=2$$

2. *(3,5 puntos)*

a) *(2 puntos) Dada la función:*

$$f(x)=\frac{x^2+4}{x}$$

Encontrar los extremos absolutos de f en el intervalo $x\in[1,5]$.

b) *(1,5 puntos)* Calcular:

$$\int_1^4(2-e^{3x})dx$$

SOLUCIÓN.

a) La función es continua en el intervalo $[1,5]$ pues solo es discontinua en $x=0$ que está fuera del intervalo. Los extremos absolutos los alcanzará en los extremos del intervalo o en los máximos y mínimos relativos que tenga en él.

$f(1)=5$, $f(5)=\dfrac{29}{5}=5{,}8$

Extremos relativos: $f'(x)=\dfrac{2x^2-x^2-4}{x^2}=\dfrac{x^2-4}{x^2}=0 \Rightarrow x=-2$, $x=2$. Comprobamos si en $x=2$ la función tiene un máximo o un mínimo relativo: $f''(x)=\dfrac{2x^3-2x^3+8x}{x^4}=\dfrac{8}{x^3} \Rightarrow f''(2)>0 \Rightarrow x=2$ es un mínimo relativo: $f(2)=4$.

Por tanto: máximo absoluto en $x=5$ y mínimo absoluto en $x=2$.

b) Obtengamos una primitiva de la función: $\int \left(2-e^{3x}\right)dx=\int 2\,dx-\dfrac{1}{3}\int 3e^{3x}\,dx=2x-\dfrac{1}{3}e^{3x}$

Por tanto: $\int_1^4 \left(2-e^{3x}\right)dx=\left[2x-\dfrac{e^{3x}}{3}\right]_1^4=\left(8-\dfrac{e^{12}}{3}\right)-\left(2-\dfrac{e^3}{3}\right)=6-\dfrac{e^{12}-e^3}{3}$

3. *(3 puntos)* Juan tiene dos urnas A y B. En la urna A hay 4 bolas blancas y 2 bolas negras y en la urna B hay 6 bolas blancas y 8 bolas negras. Juan cierra los ojos y mete la mano en la urna A, saca una bola y, sin mirarla, la pasa a la urna B. Así, la urna B queda con 15 bolas: las 14 originales y la que Juan pasó desde la urna A. Después, Juan mete la mano en la urna B, revuelve las bolas, y saca una bola.

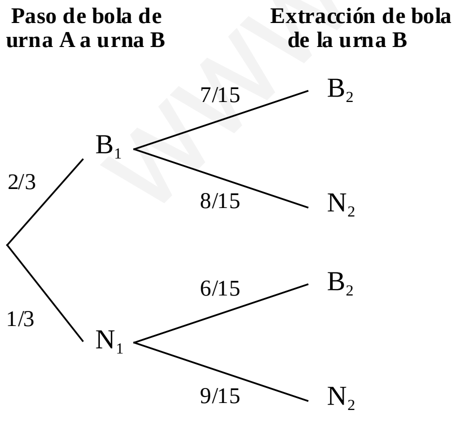
a) *(1 punto)* ¿Cuál es la probabilidad de que la bola que saca de la urna B sea exactamente la misma que la que pasó desde la urna A?

b) *(1 punto)* ¿Cuál es la probabilidad de que la bola que saca de la urna B sea blanca?

c) *(1 punto)* Si la bola que saca de la urna B es blanca, ¿qué probabilidad hay de que la bola que pasó desde la urna A fuera blanca?

SOLUCIÓN.

Organicemos las posibles situaciones en un diagrama en árbol:



a) Se trata de sacar una bola concreta de entre las quince: $p=\dfrac{1}{15}$

b) Aplicación del teorema de la probabilidad total:

$$p(B_2)=p(B_1)\cdot p(B_2/B_1)+p(N_1)\cdot p(B_2/N_1)=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{15}+\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{15}=\frac{20}{45}=\frac{4}{9}$$

c) Aplicación del teorema de Bayes:

$$p(B_1/B_2)=\frac{p(B_1)\cdot p(B_2/B_1)}{p(B_1)\cdot p(B_2/B_1)+p(N_1)\cdot p(B_2/N_1)}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{15}}{\frac{4}{9}}=\frac{126}{180}=\frac{7}{10}$$

OPCIÓN B

1. *(3,5 puntos)* Una empresa tiene dos fábricas A y B en las que produce acero. Por cada hora de funcionamiento de la fábrica A se producen 5 Tm de acero y 3 Tm de desperdicios y se emiten a la atmósfera 2 Tm de dióxido de carbono. Por cada hora de funcionamiento de la fábrica B se producen 6 Tm de acero y 1 Tm de desperdicios y se emiten a la atmósfera 4 Tm de dióxido de carbono. Por normativa medioambiental, la empresa no puede producir (entre las dos fábricas) más de 48 Tm de desperdicios al día ni puede emitir a la atmósfera (entre las dos fábricas) más de 72 Tm de dióxido de carbono al día. Por otra parte, cada una de las fábricas debe funcionar al menos 6 horas al día, y ninguna de las dos puede funcionar más de 18 horas al día. Plantear y resolver un problema de programación lineal que permita determinar cuántas horas al día debe funcionar cada fábrica para maximizar la cantidad de acero producida por la empresa, teniendo en cuenta las restricciones anteriores.

SOLUCIÓN.

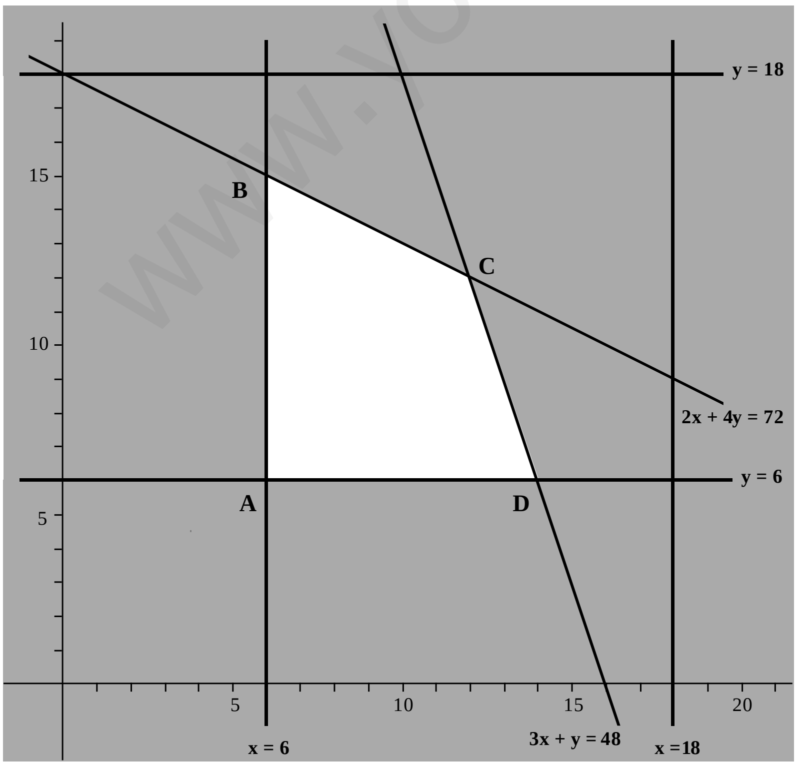
Se trata de un problema de Programación Lineal. Organicemos los datos del problema en una tabla:

FÁBRICA	HORAS/DÍA	ACERO	DESPERDICIOS	EMISIONES
A	x	5x	3x	2x
B	y	6y	y	4y
	$6 \leq x \leq 18$ $6 \leq y \leq 18$	F (x , y) maximizar	$3x + y \leq 48$	$2x + 4y \leq 72$

Así pues, la función objetivo es $F(x, y) = 5x + 6y$ que habrá que maximizar y las restricciones: $6 \leq x \leq 18$; $6 \leq y \leq 18$; $3x + y \leq 48$; $2x + 4y \leq 72$.

Dibujemos la región factible (conjunto de soluciones del sistema de restricciones):

- Las rectas $x = 6$ y $x = 18$ son verticales y pasan por $(6, 0)$ y $(18, 0)$ respectivamente. La solución de la inecuación $x \geq 6$ es el semiplano que está a la derecha de $x = 6$ y la de $x \leq 18$ es el semiplano que está a la izquierda de $x = 18$.



- Las rectas $y = 6$ e $y = 18$ son horizontales y pasan por $(0, 6)$ y $(0, 18)$ respectivamente. La solución de $y \geq 6$ es el semiplano que está por encima de $y = 6$ y la de $y \leq 18$ es el semiplano que está por debajo de $y = 18$.
- La recta $3x + y = 48$ pasa por los puntos $(16, 0)$ y $(10, 18)$. La solución de la inecuación $3x + y \leq 48$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas.
- La recta $2x + 4y = 72$ pasa por los puntos $(0, 18)$ y $(18, 9)$. La solución de la inecuación $2x + 4y \leq 72$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas.
- La región factible es el cuadrilátero ABCD (en blanco en la figura). Calculemos las coordenadas de los vértices:

Vértice A: $A(6,6)$

Vértice B: $\begin{cases} x = 6 \\ 2x+4y=72 \end{cases} \Rightarrow x = 6\,,\ y = 15 \Rightarrow B(6,15)$

Vértice C: $\begin{cases} 2x+4y=72 \\ 3x+y=48 \end{cases} \Rightarrow y = 48-3x \Rightarrow 2x+192-12x=72 \Rightarrow 10x=120 \Rightarrow x=12\ ,\ y=12 \Rightarrow C(12,12)$

Vértice D: $\begin{cases} y = 6 \\ 3x+y=48 \end{cases} \Rightarrow x = 14 \Rightarrow D(14,6)$

La función objetivo se maximiza en alguno de los vértices de la región factible. Veamos el valor de la misma en cada uno de ellos:

$$F(6,6)=5\cdot 6+6\cdot 6=66\ ;\ F(6,15)=5\cdot 6+6\cdot 15=120\ ;\ F(12,12)=5\cdot 12+6\cdot 12=132\ ;\ F(14,6)=5\cdot 14+6\cdot 6=106$$

Luego para maximizar la producción de acero, cada una de las fábricas debe funcionar durante 12 horas al día.

2. *(3,5 puntos)*

a) *(2 puntos)* Dada la función:

$$f = xy$$

definida para $x \in (0,9)$, $y \in (0,3)$, encontrar el punto (x, y) que maximiza f sujeto a la restricción $x + y^2 = 9$.

b) *(1,5 puntos)* Calcular:

$$\int_1^2 \left(7x^2 + \frac{3}{x}\right) dx$$

SOLUCIÓN.

a) $x+y^2=9 \Rightarrow x = 9-y^2 \Rightarrow f(y)=(9-y^2)y=9y-y^3$

$f'(y)=9-3y^2=0 \Rightarrow y=\sqrt{3}\ ,\ x=6$ (Descartamos el valor $y=-\sqrt{3}\notin(0,3)$)

$f''(y)=-6y \Rightarrow f''(\sqrt{3})<0 \Rightarrow y=\sqrt{3}$ maximiza la función , luego el punto buscado es: $(6,\sqrt{3})$

b) Calculemos una primitiva de la función: $\int\left(7x^2+\frac{3}{x}\right)dx = 7\int x^2\,dx + 3\int \frac{1}{x}\,dx = \frac{7x^3}{3}+3\ln x$

Por tanto: $\int_1^2 \left(7x^2+\frac{3}{x}\right)dx = \left[\frac{7x^3}{3}+3\ln x\right]_1^2 = \left(\frac{56}{3}+3\ln 2\right)-\left(\frac{7}{3}+0\right)=\frac{49}{3}+3\ln 2$

3. *(3 puntos)* Se desea estimar la proporción de individuos con sobrepeso en una población. Para ello se va a tomar una muestra aleatoria simple y se va a determinar, de cada individuo, si tiene sobrepeso o no, y a partir de los resultados se construirá un intervalo de confianza para la proporción de individuos con sobrepeso en la población. El intervalo se hará a un nivel de confianza del 96%.

a) *(2 puntos)* Si queremos que el intervalo no tenga una amplitud mayor que 0,1 ¿qué tamaño de la muestra debemos escoger?

b) *(1 punto)* Decidimos tomar una muestra de tamaño 200 individuos, de los cuales 40 tienen sobrepeso. Calcular el intervalo de confianza al 96% para la proporción de individuos con sobrepeso en la población.

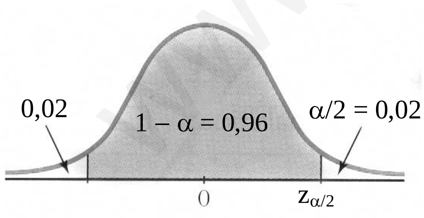
k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes

SOLUCIÓN.

a) Si la amplitud del intervalo de confianza es de 0,1, el error máximo admisible o cota de error es de $E = \frac{0,1}{2} = 0,05$

Calculemos el valor crítico $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 96%:



$$1-\alpha = 0,96 \;\Rightarrow\; \alpha = 1-0,96 = 0,04 \;\Rightarrow\; \frac{\alpha}{2} = \frac{0,04}{2} = 0,02 \;\Rightarrow\; 1-0,02 = 0,98$$

Buscamos en la tabla el valor 0,98 y el valor crítico más próximo es 2,05.

Estamos ante un supuesto de máxima incertidumbre: $pr = 0,5$.

Tenemos:

$$E = z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{pr(1-pr)}{n}} \;\Rightarrow\; n = \frac{z_{\alpha/2}^2 \cdot pr \cdot (1-pr)}{E^2} = \frac{2,05^2 \cdot 0,5 \cdot 0,5}{0,0025} = 420,25$$

Luego debemos coger una muestra de 421 individuos.

b) La proporción de individuos con sobrepeso es ahora $pr = \frac{40}{200} = 0,2$. Para un nivel de confianza del 96%, el valor crítico es $z_{\alpha/2} = 2,05$ (obtenido en el apartado anterior).

El radio del intervalo de confianza es: $E = z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{pr(1-pr)}{n}} = 2,05\cdot\sqrt{\frac{0,2\cdot 0,8}{200}} = 0,058$

El intervalo de confianza es entonces: $(0,2-0,058\,,\ 0,2+0,058) = (0,142\,;\ 0,258)$