

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. (3,5 puntos) Una empresa conservera va a preparar lotes de dos tipos, A y B, con sus productos. En cada lote de tipo A pone 10 frascos de pimientos, 2 frascos de espárragos y 1 frasco de alcachofas. En cada lote de tipo B pone 4 frascos de pimientos, 5 frascos de espárragos y 1 frasco de alcachofas. Puede utilizar, como máximo, 500 frascos de pimientos, 310 frascos de espárragos y 65 frascos de alcachofas. Sabiendo que por cada lote de tipo A obtiene un beneficio de 10 euros y por cada lote de tipo B obtiene un beneficio de 6 euros, ¿cuántos lotes de cada tipo tendrá que preparar para que su beneficio sea máximo? ¿Cuál será el valor de ese beneficio máximo?

SOLUCIÓN

Se trata de un problema de programación lineal. Organicemos los datos en una tabla:

LOTES	CANTIDAD	PIMIENTOS	ESPÁRRAGOS	ALCACHOFAS	BENEFICIOS
A	x	10x	2x	x	10x
B	y	4y	5y	y	6y
Condiciones:	$x \geq 0, y \geq 0$	$10x + 4y \leq 500$	$2x + 5y \leq 310$	$x + y \leq 65$	$F(x, y) = 10x + 6y$

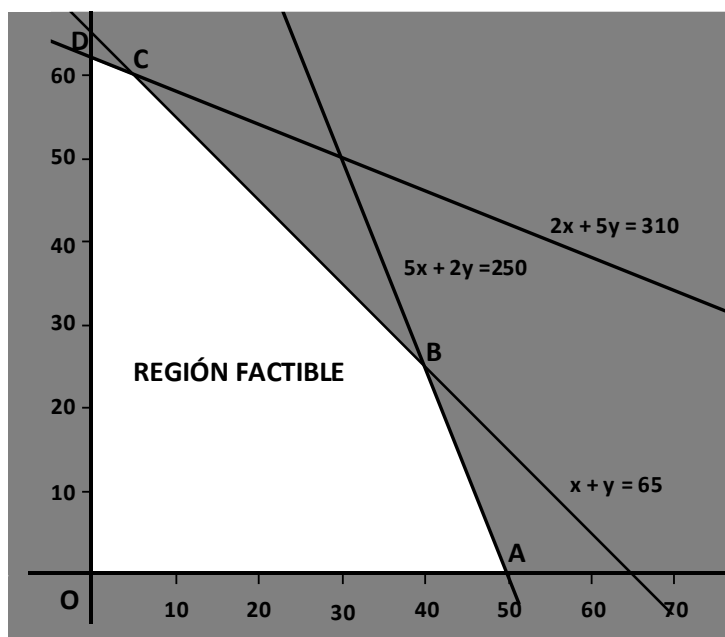
La función objetivo es $F(x, y) = 10x + 6y$ que debe maximizarse (beneficios)

Las restricciones a que debe estar sometida la solución son:

$$x \geq 0, y \geq 0, 10x + 4y \leq 500, 2x + 5y \leq 310, x + y \leq 65$$

Dibujamos la región factible:

- El semiplano solución de $x \geq 0$ es el de la derecha del eje OY.
- La solución de $y \geq 0$ es el semiplano superior respecto al eje OX.
- La recta $10x + 4y = 500 \Leftrightarrow 5x + 2y = 250$ pasa, por ejemplo, por los puntos (50,0) y (30,50). La solución de la inecuación $10x + 4y \leq 500$ es el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.
- La recta $2x + 5y = 310$ pasa por los puntos (30,50) y (55,40). La solución de $2x + 5y \leq 310$ es el semiplano al que no pertenece el origen.
- La recta $x + y = 65$ pasa por los puntos (65,0) y (0,65). La solución de la inecuación $x + y \leq 65$ es el semiplano al que no pertenece el origen.



La región factible (en blanco) es el pentágono OABCD. La solución óptima está en alguno de sus vértices. Obtengamos sus coordenadas y el valor que tiene la función objetivo en cada uno de ellos para comprobar dónde es máxima:

$$O(0,0) \Rightarrow F(0,0)=0.$$

$$A(50,0) \Rightarrow F(50,0)=500.$$

$$\text{Vértice B: } \begin{cases} 5x+2y=250 \\ x+y=65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+2y=250 \\ -2x-2y=-130 \end{cases} \Rightarrow 3x=120 \Rightarrow x=40, y=25 \Rightarrow B(40,25) \Rightarrow F(40,25)=550$$

$$\text{Vértice C: } \begin{cases} 2x+5y=310 \\ x+y=65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5y=310 \\ -2x-2y=-130 \end{cases} \Rightarrow 3y=180 \Rightarrow y=60, x=5 \Rightarrow C(5,60) \Rightarrow F(5,60)=410$$

$$\text{Vértice D: } \begin{cases} 2x+5y=310 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow y=62, x=0 \Rightarrow D(0,62) \Rightarrow F(0,62)=372$$

Para obtener el beneficio máximo, de 550 euros, se deben preparar 40 lotes de tipo A y 25 lotes de tipo B.

2. (3,5 puntos)

a) (2 puntos) Encontrar los extremos absolutos de la función:

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 8$$

en el intervalo $x \in [-4, 2]$.

b) (1,5 puntos) Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 9x} - 2x)$$

SOLUCIÓN

a) Puesto que $f(x)$ es una función continua, los extremos absolutos los alcanzará en los extremos relativos o en los extremos del intervalo. Obtengamos los extremos relativos:

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Calculamos el valor de la función en los extremos relativos (que pertenecen al intervalo) y en los extremos del intervalo:

$$f(-4) = 2(-4)^3 + 3(-4)^2 - 12(-4) + 8 = -128 + 48 + 48 + 8 = -24$$

$$f(-2) = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) + 8 = -16 + 12 + 24 + 8 = 28$$

$$f(1) = 2 + 3 - 12 + 8 = 1$$

$$f(2) = 16 + 12 - 24 + 8 = 12$$

El mínimo absoluto se alcanza en $x = -4$ y el máximo absoluto en $x = -2$.

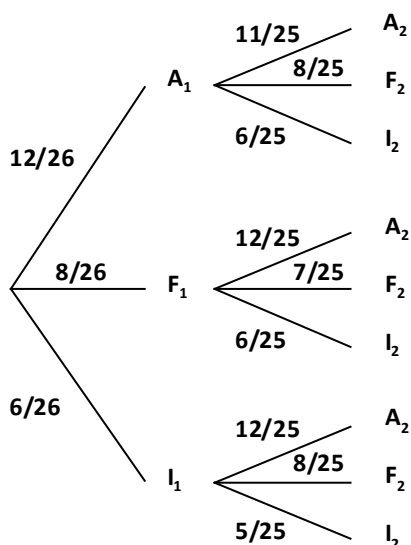
$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 9x} - 2x) &= \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + 9x} - 2x)(\sqrt{4x^2 + 9x} + 2x)}{(\sqrt{4x^2 + 9x} + 2x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + 9x - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + 9x} + 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x}{\sqrt{4x^2 + 9x} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{9x}{x}}{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2} + \frac{9x}{x^2}} + \frac{2x}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9}{\sqrt{4 + \frac{9}{x}} + 2} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

3. (3 puntos) Un grupo de turistas está formado por 12 alemanes, 8 franceses y 6 italianos. Se escogen al azar dos turistas del grupo. Calcular:
- (1 punto) La probabilidad de que los dos sean alemanes.
 - (1 punto) La probabilidad de que ninguno sea alemán.
 - (1 punto) La probabilidad de que sean de distinta nacionalidad.

SOLUCIÓN

Sean A el suceso “el turista es alemán”, F “el turista es francés” e I “el turista es italiano”. El hecho de escoger a dos turistas es equivalente a escoger a uno y, posteriormente, al otro.

Representemos las posibles situaciones mediante un diagrama en árbol:



$$a) p(A_1 \cap A_2) = \frac{12}{26} \cdot \frac{11}{25} = \frac{132}{650} = \frac{66}{325} \approx 0,2031$$

$$b) p(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = \frac{8}{26} \cdot \frac{7}{25} + \frac{8}{26} \cdot \frac{6}{25} + \frac{6}{26} \cdot \frac{8}{25} + \frac{6}{26} \cdot \frac{5}{25} = \frac{182}{650} \approx 0,28$$

$$c) p((A_1 \cap A_2) \cup (F_1 \cap F_2) \cup (I_1 \cap I_2)) = 1 - \left(\frac{12}{26} \cdot \frac{11}{25} + \frac{8}{26} \cdot \frac{7}{25} + \frac{6}{26} \cdot \frac{5}{25} \right) = 1 - \frac{218}{650} \approx 0,6646$$

OPCIÓN B

1. (3,5 puntos)

a) (2 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

encontrar, si existe, una matriz X tal que:

$$5X + 3C^2 = 2AB$$

b) (1,5 puntos) Calcular el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN

$$a) 5X + 3C^2 = 2AB \Rightarrow 5X = 2AB - 3C^2 \Rightarrow X = \frac{1}{5}(2AB - 3C^2)$$

$$\left. \begin{aligned} 2AB &= 2 \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 16 & 76 \end{pmatrix} \\ 3C^2 &= 3 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 3 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} \end{aligned} \right| X = \frac{1}{5} \left[\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 16 & 76 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 21 & 3 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -17 & 1 \\ 7 & 64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{17}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{7}{5} & \frac{64}{5} \end{pmatrix}$$

$$b) \quad \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - 3F_1}} \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_2} \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

2. (3,5 puntos) Dada la función f , definida para $x \geq 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ 9 - \frac{25}{x} & \text{si } 5 < x \leq 10 \\ 4\sqrt{x+6} - \frac{x}{5} & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

a) (0,75 puntos) ¿Para qué valores de $x > 0$ es la función f continua?

b) (1,75 puntos) ¿Cuál es el máximo valor que toma $f(x)$ para $x \in [30, 100]$?

c) (1 punto) Calcular:

$$\int_6^8 f(x) dx$$

SOLUCIÓN

a) Las tres funciones que definen a $f(x)$ son continuas en los intervalos en que están definidas ($f(x) = 9 - \frac{25}{x}$ es discontinua en $x=0$ que no pertenece al intervalo $(5, 10]$). Por tanto, si hay alguna discontinuidad estará en los extremos de los intervalos.

▪ Estudiemos la continuidad en $x=5$:

i) $\exists f(5) = 5 - 1 = 4$

ii) $\exists \lim_{x \rightarrow 5} f(x)$: $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} (x-1) = 4$, $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} \left(9 - \frac{25}{x}\right) = 4 \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 4$

iii) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = f(5) \Rightarrow$ La función es continua en $x=5$

▪ Estudiemos la continuidad en $x=10$:

i) $\exists f(10) = 9 - \frac{25}{10} = 6,5$

ii) $\exists \lim_{x \rightarrow 10} f(x)$: $\lim_{x \rightarrow 10^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 10^-} \left(9 - \frac{25}{x}\right) = 6,5$, $\lim_{x \rightarrow 10^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 10^+} \left(4\sqrt{x+6} - \frac{x}{5}\right) = 16 - 2 = 14 \Rightarrow$ y como los

límites laterales son distintos, no existe $\lim_{x \rightarrow 10} f(x) \Rightarrow$ la función es discontinua en $x=10$.

Por tanto, la función es continua en $(0, +\infty) - \{10\}$.

b) Para $x \in [30, 100]$: $f(x) = 4\sqrt{x+6} - \frac{x}{5}$

Como es una función continua, el máximo valor lo alcanzará en algún extremo relativo (caso de que exista) o en los extremos del intervalo. Calculemos los extremos relativos:

$$f'(x) = 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+6}} - \frac{1}{5} = \frac{2}{\sqrt{x+6}} - \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x+6}} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \sqrt{x+6} = 10 \Leftrightarrow x+6=100 \Rightarrow x=94 \text{ punto crítico.}$$

Calculemos el valor de la función en el único punto crítico y en los extremos del intervalo $[30, 100]$:

$$\begin{aligned} \bullet f(30) &= 24 - 6 = 18 & \bullet f(94) &= 40 - \frac{94}{5} = \frac{106}{5} = 21,2 & \bullet f(100) &= 4\sqrt{106} - 20 = 21,18 \end{aligned}$$

Luego el máximo valor de la función en el intervalo $[30, 100]$ es de 21,2 y lo alcanza en $x=94$.

$$\begin{aligned} c) \int_6^8 f(x) dx &= \int_6^8 \left(9 - \frac{25}{x}\right) dx = [9x - 25 \ln x]_6^8 = (72 - 25 \ln 8) - (54 - 25 \ln 6) = 18 - 25(\ln 8 - \ln 6) = \\ &= 18 - 25 \ln \frac{8}{6} = 18 - 25 \ln \frac{4}{3} \approx 10,8 \end{aligned}$$

3. (3 puntos) El consumo mensual de electricidad (en kWh) de los hogares de una ciudad es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 25 kWh.

- a) (1,5 puntos) Queremos construir un intervalo de confianza al 96% para la media del consumo de electricidad de los hogares de esta ciudad, de forma que su amplitud no sea mayor que 12 kWh. ¿Qué tamaño de la muestra debemos tomar?
- b) (1,5 puntos) Decidimos tomar un tamaño de la muestra igual a 10. Elegimos 10 hogares y miramos su consumo mensual en electricidad, con los siguientes resultados:

100, 125, 78, 80, 88, 89, 124, 142, 98, 125.

Calcular el intervalo de confianza al 96% para la media del consumo mensual de electricidad en los hogares de esta ciudad.

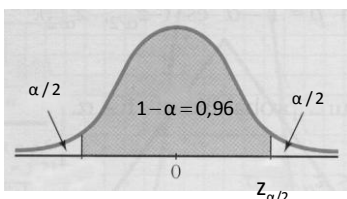
k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIÓN

- a) El radio del intervalo de confianza (error máximo admisible) es la mitad de su amplitud. En este caso, 6 kWh.

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 6$$



Obtenemos el valor crítico $z_{\alpha/2}$ correspondiente al nivel de confianza del 96%:

$$1 - \alpha = 0,96 \Rightarrow \alpha = 1 - 0,96 = 0,04 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{0,04}{2} = 0,02 \Rightarrow 1 - 0,02 = 0,98$$

Buscamos en la tabla el valor 0,98 y el más próximo (0,9798) se corresponde con un valor crítico de 2,05. Tenemos entonces:

$$z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 6 \Rightarrow 2,05 \cdot \frac{25}{\sqrt{n}} = 6 \Rightarrow n = \left(\frac{2,05 \cdot 25}{6} \right)^2 = 72,96 \Rightarrow \text{el tamaño de la muestra debe ser de 73 hogares.}$$

b) Puesto que la población de partida ya es normal, las medias de las muestras se distribuyen normalmente aunque su tamaño sea inferior a 30.

Calculemos la media de la muestra: $\bar{x} = \frac{100 + 125 + 78 + 80 + 88 + 89 + 124 + 142 + 98 + 125}{10} = 104,9 \text{ kWh}$

El radio del intervalo de confianza es: $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,05 \cdot \frac{25}{\sqrt{10}} = 16,2 \text{ kWh}$

El intervalo de confianza es: $(\bar{x} - E, \bar{x} + E) = (104,9 - 16,2, 104,9 + 16,2) = (88,7, 121,1)$