Universidad de Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2021-2022

MATEMÁTICAS II

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.
TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.
El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

BLOQUE 1.A. Sea $a \in \mathbb{R}$ y $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$.

(a) **(1 punto)** Calcula el determinante y el rango de P para cada valor de a.
(b) **(1 punto)** Para a = 1 ¿existe P^{-1}? En caso afirmativo calcúlala.
(c) **(0.5 puntos)** Calcula, en caso de que exista, los valores de a tal que $\det(P) = \det(P^{-1})$.

BLOQUE 1.B. Dado $a \in \mathbb{R}$ se considera el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} -x+2y = -1 \\ -x+2y+2z = 1 \\ ax-2y+z = 2 \end{array}\right\}$$

(a) **(1 punto)** Discute el sistema según los valores de a.
(b) **(0.75 puntos)** Estudia si es posible encontrar un valor de a para el cual la solución del sistema verifique que x = 0.
(c) **(0.75 puntos)** Si a = 0, resuelve el sistema si es posible.

BLOQUE 2.A. Se considera la función:

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}.$$

(a) **(1 punto)** Calcula el dominio de f y las asíntotas, en caso de que tenga.
(b) **(1 punto)** Estudia la existencia de máximos y mínimos, así como los intervalos de concavidad y convexidad.
(c) **(0.5 puntos)** A partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f.

BLOQUE 2.B. Se considera la función $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$.

(a) **(1.75 puntos)** Calcula una primitiva de f(x), que pase por el punto (−1, 0). (Sugerencia: Puedes utilizar el cambio de variable $t = 1-x^2$)
(b) **(0.75 puntos)** Calcula $\int_0^1 f(x)\,dx$

Universidad de Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2021-2022

BLOQUE 3.A. Sea la recta que pasa por los puntos A = (1, 0, 1) y B = (2, 1, 2) y s la recta $s \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$.

(a) **(0.75 puntos)** Indica la posición relativa de r y s.
(b) **(0.75 puntos)** Calcula un plano paralelo a r y que contiene a s.
(c) **(1 punto)** Calcula la distancia entre las rectas r y s.

BLOQUE 3.B. Dados los planos $\pi \equiv x+y+z=3,\ \pi' \equiv x+y=3$ ye el punto A = (2, 1, 6)

(a) **(0.75 puntos)** Calcula un vector director y un punto de la recta r intersección de los planos π y π′.
(b) **(1 punto)** Calcula el punto P de π tal que el segmento AP es perpendicular al plano π.
(c) **(0.75 puntos)** Calcula el punto A′ simétrico de A respecto del plano π.

BLOQUE 4.A. Se tienen tres sobres, A, B y C. En el sobre A hay dos cartas de copas y tres de bastos. En el sobre B tres cartas de copas y dos de bastos y en el sobre C cuatro de copas y una de bastos. Se tira un dado y se saca una carta del sobre A si el resultado es impar, del sobre B si el resultado es 4 o 6 y del sobre C si el resultado es un 2.

(a) **(1.25 puntos)** Calcula la probabilidad de que se obtenga una carta de bastos.
(b) **(1.25 puntos)** Se extrae una carta y resulta ser copas. ¿cuál es la probabilidad de que se haya extraído del sobre B?

BLOQUE 4.B. El peso en kilos de la población de un cierto país sigue una distribución normal de media 70 y desviación típica 10. Se selecciona un individuo al azar.

(a) **(1.25 puntos)** Calcule la probabilidad de que su peso se sitúe entre 65 y 75 kilos.
(b) **(1.25 puntos)** Se realiza una campaña de comida sana y esto repercute en el peso de la población, manteniendo la desviación típica pero ahora la probabilidad de que un individuo pese menos de 75 es 0.6. ¿Cuál es la nueva media?

(Algunos valores de la función de distribución N(0, 1) son: $F(x) = P(Z \le x)$, F(0) = 0.5, F(0.15) = 0.6, F(0.5) = 0.6915, F(0.6) = 0.7257, F(1.8) = 0.9641.)

SOLUCIONES:

BLOQUE 1.A. Sea $a \in \mathbb{R}$ y $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$.

(a) **(1 punto)** Calcula el determinante y el rango de P para cada valor de a.
(b) **(1 punto)** Para a = 1 ¿existe P^{-1}? En caso afirmativo calcúlala.
(c) **(0.5 puntos)** Calcula, en caso de que exista, los valores de a tal que det(P) = det(P^{-1}).

a)

$$|P| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix} = -a+2+0+2-0-2 = -a+2$$

$$|P| = 0 \Rightarrow -a+2=0 \Rightarrow \boxed{a=2}$$

Si a ≠ 2 el determinante de P es no nulo ($|P| = -a+2$) y su rango es 3.

Si a = 2 el determinante de P es nulo y su rango es menor que 3.

Si a = 2 la matriz queda $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

¿El rango de P es 2?

Tomamos el menor de orden 2 que resulta de suprimir la fila y columna 3ª → $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

Si a = 2 el determinante de P es 0 y su rango es 2.

b) Para a = 1 el determinante de P es no nulo y existe su inversa.

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |P| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1+2+2-2 = 1 \neq 0$$

$$P^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}=\frac{Adj\left(P^T\right)}{|P|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{P^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -1 & -4\\ -2 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}}$$

c)

$$\left.\begin{array}{r}P\cdot P^{-1}=I\Rightarrow\left|P\cdot P^{-1}\right|=|I|=1\Rightarrow|P|\cdot\left|P^{-1}\right|=1\\ |P|=\left|P^{-1}\right|\end{array}\right\}\Rightarrow|P|\cdot|P|=1\Rightarrow\left(|P|\right)^2=1\Rightarrow\begin{cases}|P|=1\\ |P|=-1\end{cases}$$

Existen dos posibilidades:

$$|P|=-a+2=1\Rightarrow\boxed{a=1}$$

$$|P|=-a+2=-1\Rightarrow\boxed{a=3}$$

Se cumple lo pedido cuando a = 1 o a = 3.

BLOQUE 1.B. Dado $a \in \mathbb{R}$ se considera el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} -x+2y \quad\quad = -1 \\ -x+2y+2z = 1 \\ ax-2y+\ \ z = 2 \end{array}\right\}$$

(a) **(1 punto)** Discute el sistema según los valores de a.
(b) **(0.75 puntos)** Estudia si es posible encontrar un valor de a para el cual la solución del sistema verifique que x = 0.
(c) **(0.75 puntos)** Si a = 0, resuelve el sistema si es posible.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ a & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ a & -2 & 1 \end{vmatrix} = -2+4a+2-4 = 4a-4$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 4a-4=0 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

Distinguimos dos casos distintos que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 1$
En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3 al igual que el rango de la matriz ampliada $A/B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ a & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. *a = 1.*
En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

El sistema queda $\left.\begin{array}{l} -x+2y \quad\quad = -1 \\ -x+2y+2z = 1 \\ x-2y+\ \ z = 2 \end{array}\right\}$. Intentamos resolverlo.

$$\left.\begin{array}{l} -x+2y \quad\quad = -1 \\ -x+2y+2z = 1 \\ x-2y+\ \ z = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^{a} - \text{ Ecuación } 1^{a} \\ \begin{array}{cccc} -x & +2y & +2z & =1 \\ x & -2y & & =1 \\ \hline & & 2z & =2 \end{array} \to \text{Nueva ecuación } 2^{a} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{a} + \text{ Ecuación } 1^{a} \\ \begin{array}{cccc} x & -2y & +z & =2 \\ -x & +2y & & =-1 \\ \hline & & z & =1 \end{array} \to \text{Nueva ecuación } 3^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -x+2y \quad\quad = -1 \\ 2z = 2 \\ z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} -x+2y \quad =-1 \\ z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -x=-1-2y \\ z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\left.\begin{array}{l} x=1+2t \\ y=t \\ z=1 \end{array}\right\}}$$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

b) Para *x = 0* el sistema queda

$$\left.\begin{array}{r} -0+2y \quad =-1 \\ -0+2y+2z=1 \\ a\cdot 0-2y+\ z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2y \quad =-1 \\ 2y+2z=1 \\ -2y+\ z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \boxed{y=\frac{-1}{2}} \\ 2y+2z=1 \\ -2y+\ z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -1+2z=1 \\ 1+z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2z=2 \\ z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{z=1}$$

La solución existe. Es *x = 0*, $y=\frac{-1}{2}$, *z = 1*. Para cualquier valor de a.

c) Si *a = 0* el sistema es compatible determinado.

El sistema queda $\left.\begin{array}{r} -x+2y \quad =-1 \\ -x+2y+2z=1 \\ -2y+\ z=2 \end{array}\right\}$. Lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{r} -x+2y \quad =-1 \\ -x+2y+2z=1 \\ -2y+\ z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -x+2y \quad =-1 \\ -x+2y+2z=1 \\ z=2+2y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -x+2y \quad =-1 \\ -x+2y+2(2+2y)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} -x+2y \quad =-1 \\ -x+2y+4+4y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -x+2y=-1 \\ -x+6y=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2y+1=x \\ -x+6y=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow -2y-1+6y=-3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4y=-2 \Rightarrow \boxed{y=\frac{-2}{4}=-0.5} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{x=-1+1=0} \\ \boxed{z=2-1=1} \end{array}\right.$$

La solución es *x = 0*; *y = –0.5*; *z = 1.*

BLOQUE 2.A. Se considera la función:

$$f\left(x\right)=\frac{x^2+3}{x-1}.$$

(a) **(1 punto)** Calcula el dominio de f y las asíntotas, en caso de que tenga.
(b) **(1 punto)** Estudia la existencia de máximos y mínimos, así como los intervalos de concavidad y convexidad.
(c) **(0.5 puntos)** A partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f.

a) La función f(x) es un cociente de polinomios, por lo tanto, el dominio es toda la recta real salvo los valores de x para los que se anule el denominador, es decir, x = 1.

$$Dom\ f\left(x\right)=\mathbb{R}-\{1\}$$

Asíntota vertical. $x=a$

¿ $x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 1} f\left(x\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3}{x-1}=\frac{1^2+3}{1-1}=\frac{4}{0}=\infty$$

$x=1$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x-1}=\infty$$

No existe asíntota horizontal

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+3}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x^2-x}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f\left(x\right)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x-1}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3-x^2+x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{x-1}=1$$

$y=x+1$ es asíntota oblicua.

b) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f\left(x\right)=\frac{x^2+3}{x-1}\Rightarrow f'\left(x\right)=\frac{2x\left(x-1\right)-1\left(x^2+3\right)}{\left(x-1\right)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2-3}{\left(x-1\right)^2}=\frac{x^2-2x-3}{\left(x-1\right)^2}$$

$$f'\left(x\right)=0\Rightarrow\frac{x^2-2x-3}{\left(x-1\right)^2}=0\Rightarrow x^2-2x-3=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(-3)}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}=\begin{cases}\dfrac{2+4}{2}=\boxed{3=x}\\ \dfrac{2-4}{2}=\boxed{-1=x}\end{cases}$$

Estudio el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

En el intervalo $(-\infty,-1)$ tomamos $x=-2$ y la derivada vale

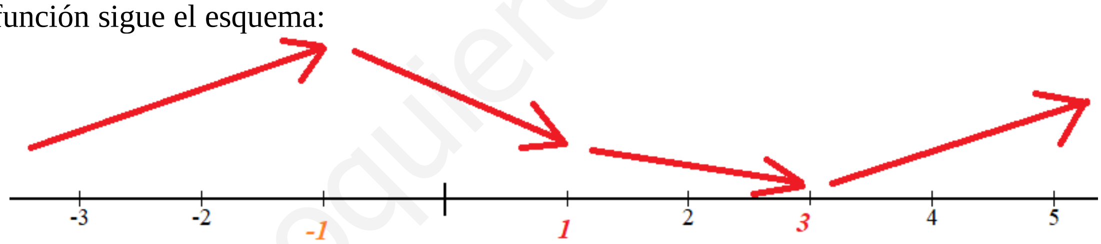
$f'(-2)=\dfrac{(-2)^2-2(-2)-3}{(-2-1)^2}=\dfrac{5}{9}>0$. La función crece en $(-\infty,-1)$

En el intervalo $(-1,1)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0)=\dfrac{0^2-0-3}{(0-1)^2}=-3<0$. La función decrece en $(-1,1)$

En el intervalo $(1,3)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale $f'(2)=\dfrac{2^2-4-3}{(2-1)^2}=-3<0$. La función decrece en $(1,3)$

En el intervalo $(3,+\infty)$ tomamos $x=4$ y la derivada vale $f'(4)=\dfrac{4^2-8-3}{(4-1)^2}=\dfrac{5}{9}>0$. La función crece en $(3,+\infty)$

La función sigue el esquema:



La función presenta un máximo relativo en $x=-1$ y un mínimo relativo en $x=3$.

Utilizamos la derivada segunda para estudiar la concavidad y convexidad.

$$f'(x)=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}\Rightarrow f''(x)=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x-3)}{(x-1)^4}$$

$$f''(x)=\frac{(x-1)\left[(2x-2)(x-1)-2(x^2-2x-3)\right]}{(x-1)^4}=\frac{(2x-2)(x-1)-2(x^2-2x-3)}{(x-1)^3}$$

$$f''(x)=\frac{2x^2-2x-2x+2-2x^2+4x+6}{(x-1)^3}=\frac{8}{(x-1)^3}$$

La derivada segunda nunca se anula. Estudiamos el signo de la derivada segunda antes y después de $x=1$ (excluido del dominio9.

En el intervalo $(-\infty,1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale $f''(0)=\dfrac{8}{(0-1)^3}=-8<0$.

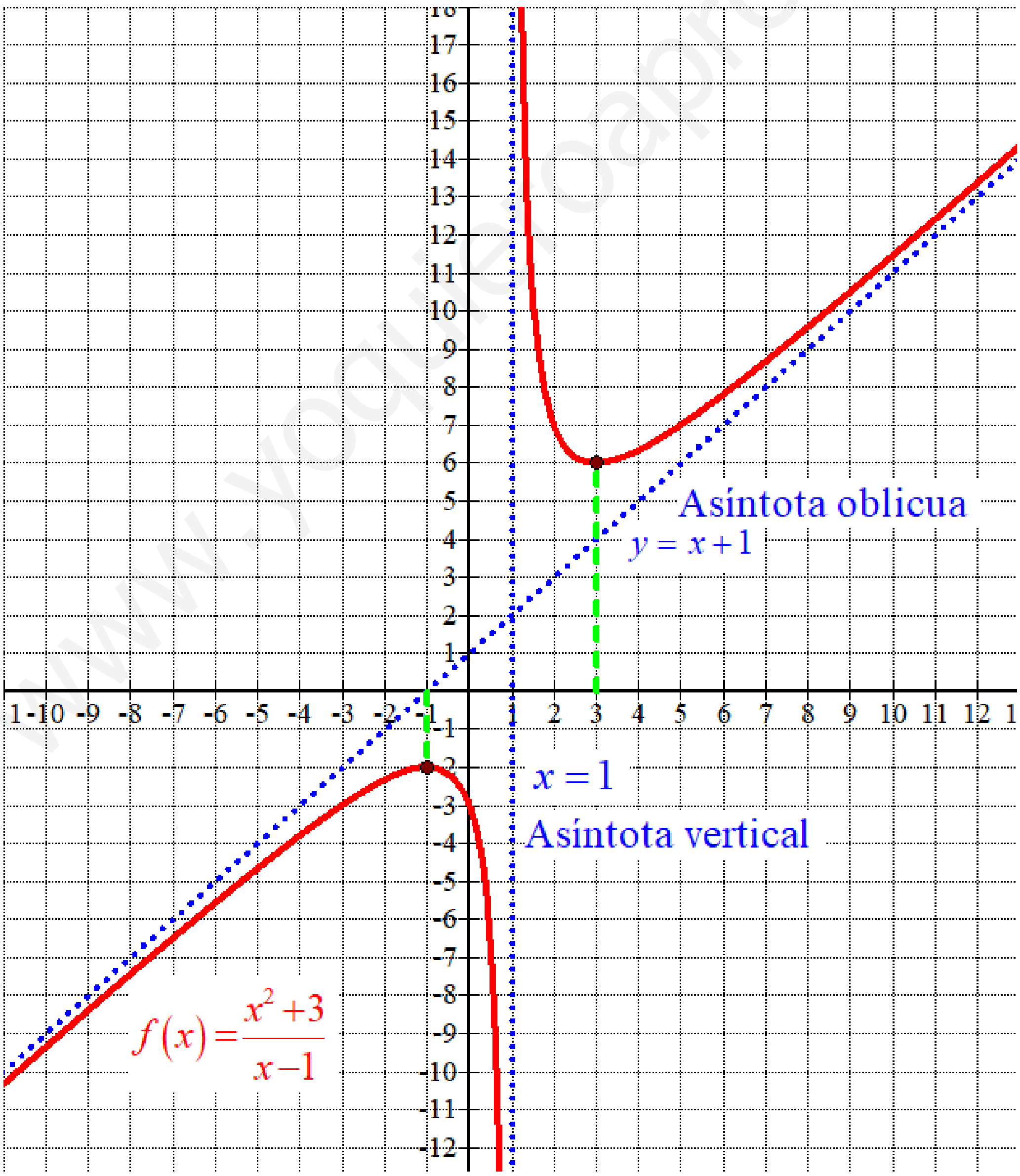
La función es cóncava (∩) en $(-\infty,1)$

En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada segunda vale $f''(2)=\dfrac{8}{(2-1)^3}=8>0$.

La función es convexa (∪) en $(1,+\infty)$

c) Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica.

x	$f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$
-3	-3
-1	-2 *Máximo relativo*
0	-3
3	6 *Mínimo relativo*
5	7



BLOQUE 2.B. Se considera la función $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$.
(a) **(1.75 puntos)** Calcula una primitiva de f(x), que pase por el punto (−1, 0). (Sugerencia: Puedes utilizar el cambio de variable $t=1-x^2$)
(b) **(0.75 puntos)** Calcula $\int_0^1 f(x)\,dx$

a) Calculamos la integral indefinida de f(x).

$$F(x)=\int f(x)dx=\int x\sqrt{1-x^2}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ t=1-x^2\Rightarrow dt=-2xdx\\ dx=\dfrac{dt}{-2x}\end{array}\right\}=\int x\sqrt{t}\frac{dt}{-2x}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\sqrt{t}dt=-\frac{1}{2}\int t^{1/2}dt=-\frac{1}{2}\frac{t^{1/2+1}}{1/2+1}=-\frac{1}{2}\frac{t^{3/2}}{3/2}=-\frac{1}{3}t^{3/2}=-\frac{1}{3}\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}+K$$

Como la primitiva debe pasar por el punto (–1, 0) se debe cumplir que *F(–1) = 0*

$$\left.\begin{array}{l}F(x)=-\dfrac{1}{3}\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}+K\\ F(-1)=0\end{array}\right\}\Rightarrow F(-1)=-\frac{1}{3}\sqrt{\left(1-(-1)^2\right)^3}+K=0\Rightarrow 0+K=0\Rightarrow K=0$$

La primitiva buscada es $F(x)=-\frac{1}{3}\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}$

b) Utilizamos la integral indefinida calculada en el apartado a).

$$\int_0^1 f(x)dx=\left[-\frac{1}{3}\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}\right]_0^1=\left[-\frac{1}{3}\sqrt{\left(1-1^2\right)^3}\right]-\left[-\frac{1}{3}\sqrt{\left(1-0^2\right)^3}\right]=0+\frac{1}{3}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

BLOQUE 3.A. Sea la recta que pasa por los puntos A = (1, 0, 1) y B = (2, 1, 2) y s la recta $s \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$.

(a) **(0.75 puntos)** Indica la posición relativa de r y s.

(b) **(0.75 puntos)** Calcula un plano paralelo a r y que contiene a s.

(c) **(1 punto)** Calcula la distancia entre las rectas r y s.

a) Hallamos el vector director de la recta que pasa por los puntos A = (1, 0, 1) y B = (2, 1, 2).

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{AB} = (2,\ 1,\ 2) - (1,\ 0,\ 1) = (1,1,1)$$

El vector director de la recta s es $\overrightarrow{v_s} = (1,-1,1)$

Como los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales las rectas no non coincidentes ni paralelas.

Para decidir si se cortan o cruzan calculamos el producto mixto $\left[\overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{P_sA}\right]$ y vemos si es nulo o no. El punto P_s es un punto de la recta s y A es un punto de la recta r.

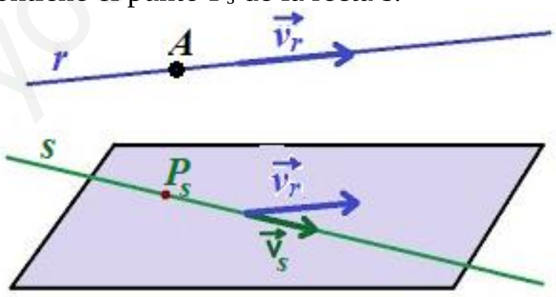
$$s \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1} \Rightarrow P_s(2,2,0)$$

$$\overrightarrow{P_sA} = (1,0,1) - (2,2,0) = (-1,-2,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{P_sA} = (-1,-2,1) \\ \overrightarrow{v_s} = (1,-1,1) \\ \overrightarrow{v_r} = (1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{P_sA}\right] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1+1-2+1+1+2 = 4 \neq 0$$

Como es distinto de cero las rectas se cruzan.

b) El plano paralelo a r y que contiene a s tiene como vectores directores el vector director de r y el vector director de s y contiene el punto P_s de la recta s.



$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{v_s} = (1,-1,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{v_r} = (1,1,1) \\ P_s(2,2,0) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x+2+y-2+z+z-y+2-x+2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x+2z+4 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x-z-2 = 0}$$

c) La distancia entre las rectas es igual que la distancia de la recta r al plano **π** obtenido en el apartado b). Y a su vez, es igual que la distancia del punto A al plano **π**.

$$d(r,s) = d(r,\pi) = d(A,\pi) = \left\{\begin{array}{l} \pi \equiv x-z-2 = 0 \\ A(1,0,1) \end{array}\right\} = \frac{|1-1-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \boxed{\sqrt{2}\,u}$$

BLOQUE 3.B. Dados los planos $\pi \equiv x+y+z=3,\ \pi' \equiv x+y=3$ y el punto A = (2, 1, 6)

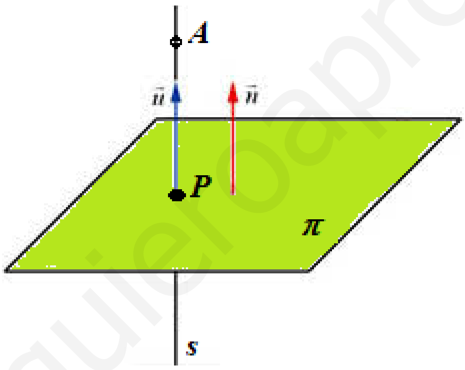
(a) **(0.75 puntos)** Calcula un vector director y un punto de la recta r intersección de los planos π y π′.
(b) **(1 punto)** Calcula el punto P de π tal que el segmento AP es perpendicular al plano π.
(c) **(0.75 puntos)** Calcula el punto A′ simétrico de A respecto del plano π.

a) Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta r.

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=3 \\ x=3-y \end{cases} \Rightarrow 3-y+y+z=3 \Rightarrow z=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=3-\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{r \equiv \begin{cases} P_r(3,0,0) \\ \overrightarrow{v_r}(-1,1,0) \end{cases}}$$

b) Hallamos la recta s perpendicular al plano π que pasa por A. El punto de intersección de esta recta y el plano π es el punto P buscado.



El vector normal del plano es el director de la recta s.

$$\pi \equiv x+y+z=3 \Rightarrow \vec{n}=(1,1,1)$$

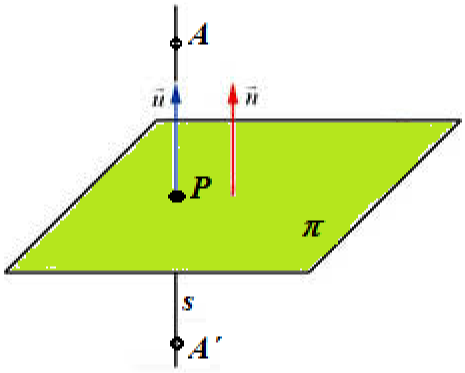
$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_s}=\vec{n}=(1,1,1) \\ A(2,1,6)\in s \end{array}\right\} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=2+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=6+\lambda \end{cases}$$

Hallamos el punto P de intersección de la recta s y el plano π

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x+y+z=3 \\ s \equiv \begin{cases} x=2+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=6+\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 2+\lambda+1+\lambda+6+\lambda=3 \Rightarrow 3\lambda=-6 \Rightarrow \lambda=-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2-2=0 \\ y=1-2=-1 \\ z=6-2=4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(0,-1,4)}$$

c) El punto A´ simétrico de A respecto del plano es el resultado de sumarle al punto P el vector $\overrightarrow{AP}$.



$$\overrightarrow{AP} = (0,-1,4)-(2,1,6) = (-2,-2,-2)$$

$$A' = P + \overrightarrow{AP} = (0,-1,4)+(-2,-2,-2)$$

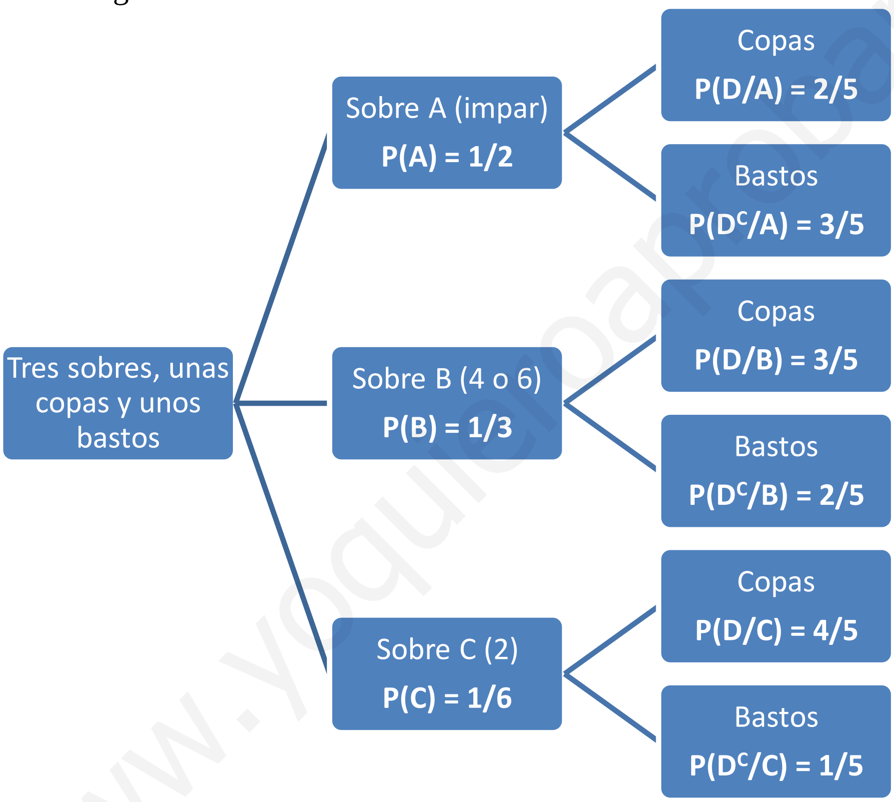
$$\boxed{A' = (-2,-3,2)}$$

BLOQUE 4.A. Se tienen tres sobres, A, B y C. En el sobre A hay dos cartas de copas y tres de bastos. En el sobre B tres cartas de copas y dos de bastos y en el sobre C cuatro de copas y una de bastos. Se tira un dado y se saca una carta del sobre A si el resultado es impar, del sobre B si el resultado es 4 o 6 y del sobre C si el resultado es un 2.
(a) **(1.25 puntos)** Calcula la probabilidad de que se obtenga una carta de bastos.
(b) **(1.25 puntos)** Se extrae una carta y resulta ser copas. ¿cuál es la probabilidad de que se haya extraído del sobre B?

Llamamos A = "sacar impar con el dado", B = "sacar 4 o 6", C = "sacar 2", D = "Sacar copas", D^C = "sacar bastos".

Las probabilidades son P(A) = 1/2, P(B) = 2/6 = 1/3, P(C) = 1/6.
P(D/A) = 2/5, P(D/B) = 3/5, P(D/C) = 4/5

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D^C) = P(A)P(D^C/A) + P(B)P(D^C/B) + P(C)P(D^C/C) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5} = \boxed{\frac{7}{15} \simeq 0.47}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/D) = \frac{P(B\cap D)}{P(D)} = \frac{P(B)P(D/B)}{1-P(D^C)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}}{1-\frac{7}{15}} = \boxed{\frac{3}{8} = 0.375}$$

BLOQUE 4.B. El peso en kilos de la población de un cierto país sigue una distribución normal de media 70 y desviación típica 10. Se selecciona un individuo al azar.
(a) **(1.25 puntos)** Calcule la probabilidad de que su peso se sitúe entre 65 y 75 kilos.
(b) **(1.25 puntos)** Se realiza una campaña de comida sana y esto repercute en el peso de la población, manteniendo la desviación típica pero ahora la probabilidad de que un individuo pese menos de 75 es 0.6. ¿Cuál es la nueva media?
(Algunos valores de la función de distribución N(0, 1) son: F(x) = P(Z ≤ x), F(0) = 0.5, F(0.15) = 0.6, F(0.5) = 0.6915, F(0.6) = 0.7257, F(1.8) = 0.9641.)

Sea X = El peso en kilos de la población de un cierto país
X = N(70, 10).

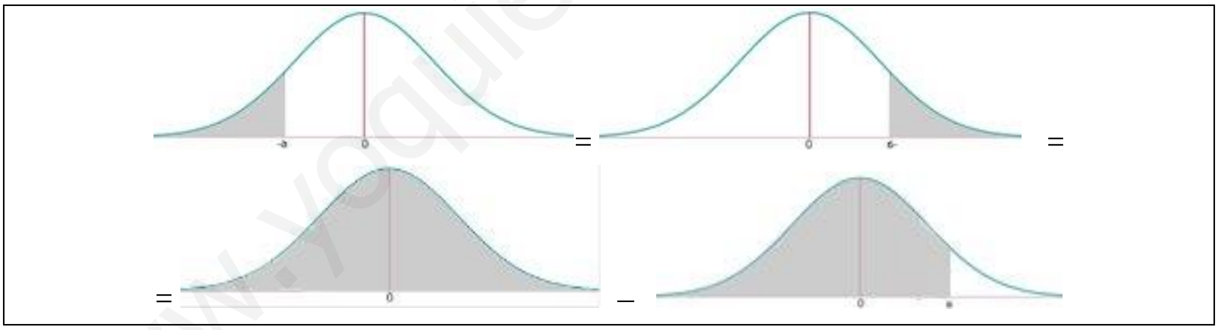
a) Nos piden $P(65 \le X \le 75)$.

$$P(65 \le X \le 75) = P(X \le 75) - P(X \le 65) = \{Tipificamos\} =$$

$$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{75-70}{10}\right) - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{65-70}{10}\right) = P(Z \le 0.5) - P(Z \le -0.5) =$$

$$= P(Z \le 0.5) - P(Z \ge 0.5) = P(Z \le 0.5) - \left[1 - P(Z \le 0.5)\right] = \left\{\begin{matrix} \text{Miramos en los datos} \\ F(0.5) = 0.6915 \end{matrix}\right\} =$$

$$= 0.6915 - [1 - 0.6915] = \boxed{0.3830}$$



b) Tenemos X = N(μ, 10)

Y sabemos que $P(X \le 75) = 0.6$ por lo que:

$$P(X \le 75) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \le \frac{75-\mu}{10}\right) = 0.6 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \text{Miramos en los datos} \\ F(0.15) = 0.6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{75-\mu}{10} = 0.15 \Rightarrow 75 - \mu = 1.5 \Rightarrow 75 - 1.5 = \mu \Rightarrow \boxed{\mu = 73.5}$$